

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

серия основана в 1996 г.



В.И. МАЛЫХИН

МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Москва
ИНФРА-М
2000

УДК 330.115(075.8)
ББК 22.11.я73
М 20

М 20 Мальхин В.И. Математика в экономике: Учебное пособие. — М.: ИНФРА-М, 2000. — 356 с. — (Серия «Высшее образование»).

ISBN 5-86225-867-1.

Экономисту необходимо знать математику. Математический аппарат — важный инструмент экономического анализа, организации и управления.

Пособие составлено в виде лекций, объединенных по темам. В конце каждой лекции приведены решения типовых задач, а также задания для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов экономических факультетов вузов.

ББК 22.11.я73

ISBN 5-86225-867-1

© В.И. Мальхин, 1999

ВВЕДЕНИЕ

КАКУЮ МАТЕМАТИКУ И КАК ДОЛЖЕН ИЗУЧАТЬ БУДУЩИЙ ЭКОНОМИСТ (МЕНЕДЖЕР)

Существуют два взгляда на математику и ее роль среди других наук в процессе обучения. Первый считает, что математика — это нечто самостоятельное, самоценное. Второй это признает также, но в основном считает математику инструментом, владение которым полезно и необходимо. Несомненно, математика имеет определенное мировоззренческое значение, но для специалистов по экономике, управлению — «менеджеров» математика является в большей мере инструментом анализа, организации, управления. Исходя из этого и написана данная книга.

Книга называется «Математика в экономике» и состоит из трех частей, соответствующих трем семестрам, в которых предполагается изучение математики и ее применения в экономике и финансах. Первая часть называется «Основы линейной алгебры и математического анализа». Вторая часть называется «Математический анализ с экономическими приложениями» и третья — «Теория вероятностей и статистические методы в экономике».

Книга написана иначе, чем классические курсы высшей математики для вузов. Первое отличие в том, что все изучаемые математические понятия иллюстрируются приложениями из экономики, финансов, управления. Эти приложения не разрозненны. Фактически эти приложения охватывают важнейшие понятия, разделы «Математической экономики», «Финансовой математики» (например, теория потребительского спроса, теория оптимального портфеля, теория принятия решений группой лиц и т.п.). Часто эти приложения выходят на первый план, т.е. показывается, что математические понятия вводятся и изучаются ради экономических. Это — вторая особенность книги. Третья особенность касается третьей части. В ней теория вероятностей и математическая статистика излагаются, в сущности, одновременно, что придает учебному материалу сжатость, концентрированность. Изложение полной теории некоторых вопросов не предусматривается, надежда на овладение соответствующими компьютерными программами (например, нет теории симплекс-метода, однако вполне возможно освоение какого-нибудь пакета по линейному программированию на практических занятиях или самостоя-

ятельно). Многие доказательства опущены, при желании их легко найти в более продвинутых курсах вузовской математики. Предусмотрены необходимые контрольные мероприятия (что особенно важно для заочного и вечернего обучения).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Реальные объекты слишком сложны, поэтому для их изучения создают модели — копии изучаемых реальных объектов. С одной стороны, модели должны быть доступны для изучения, в силу чего они не должны быть слишком сложными — значит, они неминуемо будут лишь упрощенными копиями. Но с другой стороны, выводы, полученные при их изучении, мы хотим распространить на реальные объекты-прототипы, следовательно, модель должна отражать существенные черты изучаемого реального объекта.

В силу такой двойственности построение, составление моделей во многом является искусством. Чем удачнее будет подобрана, построена модель, чем лучше она будет отражать существенные черты реального объекта, тем успешнее будет ее исследование и полезнее вытекающие из этого исследования выводы и рекомендации.

В научном исследовании используются самые различные модели: натуральные (например, в лаборатории строят маленький ручеек и над ним возводят копию ГЭС в масштабе 1 : 100) и абстрактные; физические (из трансформаторов, сопротивлений, вольтметров и т.п.); математические (из переменных, функций, неравенств и т.п.).

Составление математических моделей и называется *математическим моделированием*. Именно через составление математических моделей применяется математика в научных исследованиях, в других науках. Это довольно ярко заметно и в экономической науке.

Фактически математический аппарат и математические модели, в которых он применяется, излагаются в данной книге, в сущности, параллельно.

СТРУКТУРА УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ

Книга имеет следующую структуру: части, темы, разделы, пункты.

Автор старался написать тексты реальных лекций — по объему, по удобству изложения и т.п. Номер раздела складывается из номера темы и номера раздела внутри этой темы. Например, раздел 2.1 — это во 2-й теме 1-й раздел. Автор старался компоновать пункты так, чтобы их можно было взять в качестве экзаменационных или зачетных вопросов. В каждом разделе помещены также решения типовых задач и задачи для практических занятий или самостоятельного решения. Рисунки, формулы, примеры, задачи нумеруются внутри

ЧАСТЬ 1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Тема 1. ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ В ЭКОНОМИКЕ

1.1. ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

1. Начальные сведения о векторах. *Вектором* называется упорядоченный набор чисел. Так, $(1, 3, 7)$ есть вектор. Обозначим его кратко P , тогда $P = (1, 3, 7)$. Числа в векторе с учетом их расположения по номеру в наборе называются *компонентами* вектора. Так, в векторе P число 1 есть 1-я компонента, число 3 — 2-я, число 7 — 3-я компонента. Число компонент вектора называется его *размерностью*. Следовательно, P — трехмерный вектор.

Пример 1. Пусть завод производит мужские, женские и детские велосипеды. Тогда объем его производства V за год можно записать как вектор (M, L, D) , где M — объем производства за год мужских велосипедов, L — женских и D — детских. Например, пусть объем производства в 1996 г. был $V_{96} = (1000, 800, 4000)$. Предположим, что план на 1997 г. на 10% больше объема производства в 1996 г., тогда этот план есть вектор $V_{97} = (1100, 880, 4400)$. Пусть торговая фирма «Велосипеды» покупает половину всей продукции завода, тогда в 1996 г. она купила $W = (500, 400, 2000)$. Предположим, что в стране всего три велосипедных завода, объемы производства которых в 1996 г. были $Q_1 = (1000, 800, 4000)$, $Q_2 = (1000, 600, 2000)$, $Q_3 = (2000, 1600, 8000)$. Тогда все три завода вместе произвели $Q = (4000, 3000, 14\ 000)$, т.е. 4000 мужских, 3000 женских и 14 000 детских велосипедов. Можно также отметить, что $Q_3 = 2Q_1$, т.е. 3-й завод произвел в 2 раза больше велосипедов каждого вида, чем 1-й завод.

Приведенные выше векторы V_{96} , V_{97} , W , Q_1 , Q_2 , Q_3 и т.д. — это примеры конкретных векторов. Произвольный трехмерный вектор можно обозначить (x_1, x_2, x_3) или кратко X . В векторе X компонента x_1 есть 1-я компонента, x_2 — 2-я, x_3 — 3-я. Произвольный четырехмерный вектор можно обозначить (x_1, x_2, x_3, x_4) , и если n — какое-нибудь натуральное число, то $(x_1, \dots, x_n)$ обозначает произвольный n -мерный вектор.

Векторы бывают двух видов — *векторы-строки* и *векторы-столбцы*. Все вышеприведенные были векторы-строки. Векторы-строки записываются в виде упорядоченной строки, векторы-столбцы записываются в виде упорядоченного столбца (нумерация компонент век-

тора-столбца идет сверху), например $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. По типографским сообра-

жениям удобнее иметь дело с векторами-строками. Однако иногда необходимо использовать векторы-столбцы.

Векторы широко используются во всех областях науки, в том числе в экономической. Многие обозначения при использовании векторов очень компактны, при этом не теряют в наглядности и содержательности.

Примечание 1. Вообще-то в математике понятие «вектор» многозначно. Уже в школе в курсе физики вектор понимался как направленный отрезок с фиксированным началом (точкой приложения силы). В геометрии иногда под вектором понимается преобразование плоскости или пространства специального вида (перемещение). В дальнейшем такое понимание вектора иногда будет использоваться.

Примечание 2. В математике понятие «вектор» может обозначать упорядоченный набор не только чисел, но и любых объектов, т.е. когда 1-я компонента вектора обозначает (или есть) элемент некоторого множества M_1 , 2-я компонента — элемент множества M_2 и т.д. Это более общее понятие вектора иногда используется в нашем курсе далее.

2. Действия с векторами. В примере 1 мы уже умножали вектор на число. Действительно, $Q_3 = 2Q_1$. В этом же примере мы сложили три вектора $Q_1 + Q_2 + Q_3$ и получили их сумму Q . Действия с векторами очень естественны и весьма напоминают обычные действия с числами. Можно сказать, что действия с векторами являются естественным расширением действий над числами на более широкую область.

Любой вектор можно умножить на любое число. Для этого каждая компонента вектора умножается на это число и эти произведения образуют вектор-результат.

Умножим вектор $U = (2, 3)$ на 3. Получим вектор $(6, 9)$. Его естественно обозначить $3U$.

Умножим вектор $Q_1 = (1000, 800, 4000)$ на 2. Получим вектор $(2000, 1600, 8000)$, равный Q_2 . Итак, $Q_2 = 2Q_1$, что и послужило нам основанием сказать выше, что 3-й велосипедный завод произвел в 2 раза больше велосипедов, чем 1-й. (Иногда, впрочем, при умножении вектора содержательный смысл вектора-результата теряется. Например, при умножении вектора Q_1 на $1/3$ в векторе-результате 2-я компонента не целое число и ее нельзя трактовать как число велосипедов.)

Любые два вектора одной размерности можно сложить. Для этого складываются первые компоненты, затем вторые и т.д. Эти суммы образуют вектор-результат.

Сложим вектор $Q_1 = (1000, 800, 4000)$ и $Q_2 = (2000, 1600, 8000)$. Получим вектор $K = (3000, 2400, 12\,000)$. Проверьте, что $K = 3Q_1$.

Однако векторы разной размерности складывать нельзя.

Операции умножения вектора на число и сложения векторов обладают следующими свойствами;

- а) сложение векторов ассоциативно, т.е. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$ — это свойство позволяет складывать любое конечное число векторов (так, в примере 1 была найдена сумма трех векторов $Q_1 + Q_2 + Q_3$);
- б) сложение векторов распределительно по отношению к умножению на число, т.е. $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$.

Не будем описывать некоторые дальнейшие свойства операций над векторами, скажем лишь еще раз о сходстве операций над векторами с обычными операциями над числами.

Но есть и некоторые отличия операций над векторами от операций над числами. Так, для любых чисел a и $b \neq 0$ можно узнать, «во сколько раз» a больше b , т.е. найти a/b . Но для двух векторов это сделать, в общем, нельзя. Например, для $E = (7, 1)$ и $N = (1, 1)$ нет такого λ , чтобы $E = \lambda N$.

Два вектора называются *равными*, если они равны покомпонентно, т.е. если равны их первые компоненты, вторые и т.д. Итак, если $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$, то $X = Y$, если и только если $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$. Как видно из определения равенства, лишь для векторов одинаковой размерности можно говорить о равенстве или неравенстве этих векторов. Для векторов разной размерности говорить об их равенстве бессмысленно.

Пусть X, Y — векторы одинаковой размерности, тогда $X \geq Y$, если и только если $x_1 \geq y_1, \dots, x_n \geq y_n$. Например, $X \geq Y$, если $X = (6, 3, 0)$ и $Y = (5, 1, 0)$. Но векторы X и $Z = (5, 4, 0)$ несравнимы: ни одно из возможных соотношений $X \leq Z$, $X = Z$, $X \geq Z$ не верно (еще одно отличие от чисел).

Иногда вектор удобно записывать так: $X = (x_i)$, где x_i обозначает произвольную компоненту вектора X .

Описанные действия с векторами были иллюстрированы на примере векторов-строк. Действия с векторами-столбцами точно такие же, в результате получаются, конечно, также векторы-столб-

цы. Пусть $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, тогда $2X$ есть вектор $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ и т.д. Векторы-строки

и векторы-столбцы одинаковой размерности связаны операцией *транспонирования*. Она превращает вектор-строку в вектор-столбец и, наоборот, вектор-столбец в вектор-строку. Эта операция обозна-

чается верхним индексом $*$. Пусть $U = (2, 3)$, тогда $U^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; пусть

$H = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, тогда $H^T = (0, 7)$. Легко понять, что операция транспонирования, осуществленная последовательно дважды, дает исходный вектор: $(X^T)^T = X$, каков бы ни был вектор X — строка или столбец.

Скалярное произведение векторов. Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ — векторы одинаковой размерности, тогда число $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ называется *скалярным произведением* векторов X , Y и обозначается $X \cdot Y$. Приведем без доказательств (они очень просты) свойства скалярного произведения: а) $X \cdot Y = Y \cdot X$; б) $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$; в) $X \cdot (\lambda Y) = \lambda(X \cdot Y)$ для любых векторов X , Y и любого числа λ .

3. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Пусть R^n обозначает множество всех n -мерных вектор-строк. Заметим, что это не просто множество — R^n несет определенную структуру. Именно любой вектор $X \in R^n$ можно умножить на любое число λ и результат — вектор λX есть снова элемент множества R^n . Сумма двух и даже любого конечного числа векторов из R^n снова есть элемент R^n . Кроме того, операции умножения вектора на число и сложения векторов связаны друг с другом определенными соотношениями (см. п. 2).

Во множестве R^n есть уникальный вектор $\bar{0} = (0, \dots, 0)$. Его роль вполне аналогична роли числа 0 во множестве чисел. Так, $0 \cdot X = \bar{0}$ и $X + \bar{0} = X$ для любого $X \in R^n$.

Вектор X , удовлетворяющий неравенству $X \geq \bar{0}$, называется *неотрицательным*. Неотрицательный вектор — это в точности тот, все компоненты которого неотрицательны. Вектор $(2, 3)$ является неотрицательным, а вектор $(-2, 4)$ — нет, ибо его 1-я компонента не является неотрицательным числом.

По всем этим причинам R^n называют n -мерным числовым (или арифметическим) линейным пространством. Слово «числовое» в названии линейного пространства подчеркивает, что элементами такого пространства являются векторы, компоненты которых есть числа.

Вектор $B = (b_1, \dots, b_m)$ называется *линейной комбинацией* векторов $A_1 = (a_{11}, \dots, a_{m1})$, ..., $A_n = (a_{1n}, \dots, a_{mn})$ той же размерности, если найдутся числа $x_1, \dots, x_n$ такие, что $B = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$. Следовательно, чтобы узнать это, надо решить систему из m линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Узнаем, например, является ли вектор $F = (1, 6)$ линейной комбинацией векторов $H_1 = (1, 2)$, $H_2 = (0, 2)$. Получаем совсем простую СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

Ее решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Следовательно, $F = H_1 + 2H_2$.

Система векторов называется *линейно зависимой*, если какой-то вектор системы есть линейная комбинация остальных векторов системы, и *линейно независимой* в противном случае, т.е. когда никакой вектор системы не является линейной комбинацией остальных векторов системы.

Например, система из трех вышеприведенных векторов F , H_1 , H_2 линейно зависима, ибо $F = H_1 + 2H_2$.

Пусть $\mathcal{A}$ — какая-нибудь система векторов, тогда ее подсистема $\mathcal{E}$ называется *базисом* этой системы, если $\mathcal{E}$ линейно независима, и любой вектор системы $\mathcal{A}$ есть линейная комбинация векторов из $\mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$. Если $B \in \mathcal{A}$, то $B = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_n$ при некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Линейная комбинация $\lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_n E_n$ называется *разложением* вектора B по векторам $E_1, \dots, E_n$, а числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ называются *коэффициентами* этого разложения.

Эти коэффициенты называются *координатами* вектора в базисе $\mathcal{E}$.

Теорема 1. Любая система векторов имеет хотя бы один базис. Число элементов в любом базисе данной системы одно и то же. Координаты любого вектора в базисе определяются однозначно.

Теорема 2. В пространстве R^n любая система векторов в количестве более n является линейно зависимой.

Пример 2. Укажем базис в пространстве R^n . Его образуют векторы $E_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $E_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $E_n = (0, 0, \dots, 1)$.

Докажем, что $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$ есть базис.

1. Система $\mathcal{E}$ — линейно независимая система. Действительно, предположим, что, например, E_1 есть линейная комбинация векторов $E_2, \dots, E_n$, т.е. $E_1 = \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_n E_n$. Сравнивая первые компоненты вектора E_1 и линейной комбинации $\lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_n E_n$, получаем противоречие: $1 = \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_n \cdot 0$, т.е. таких λ_i не существует.

2. Пусть $B = (b_1, \dots, b_n)$ — произвольный вектор из R^n . Как легко видеть, $B = b_1 E_1 + \dots + b_n E_n$, т.е. вектор B представим в виде линейной комбинации векторов системы E и компоненты вектора B есть его координаты в этом базисе.

4. **Пространство товаров, вектор цен.** Под *товаром* понимаются некоторое благо или услуга, поступившие в продажу в определенное время и в определенном месте. Будем считать, что имеется n различных товаров, количество i -го товара обозначается x_i , тогда некоторый набор товаров обозначается $X = (x_1, \dots, x_n)$, т.е. является n -мерным вектором. Будем рассматривать, как правило, только неотрицательные количества товаров, так что для любого $i = 1, \dots, n$ $x_i \geq 0$ или $X \geq 0$. Множество всех наборов товаров называется *пространством товаров* S . Это множество называется пространством потому, что в нем можно сложить любые два набора и умножить любой набор товаров на любое неотрицательное число. Возможность умножения набора товаров на любое неотрицательное число отражает предположение о безграничной делимости и умножении товаров (т.е. товары устроены наподобие сахарного песка, а не авианосцев).

В дальнейшем предполагаем, что каждый товар имеет *цену*. Все цены предполагаются строго положительными. Пусть цена единицы i -го товара есть p_i , тогда вектор $P = (p_1, \dots, p_n)$ есть *вектор цен*.

Набор товаров, как вектор, имеет ту же размерность, что и вектор цен. Для набора товаров $X = (x_i)$ и вектора цен $P = (p_i)$ их скалярное произведение $P \cdot X = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$ есть число, называемое *ценой набора* или его *стоимостью*, и будет обозначаться $s(X)$.

ЗАДАЧИ

1. В районе три обменных пункта валюты от одного банка. Обмен в них идет только долларов и немецких марок на рубли. Каждый вечер остаток всех денег сдается в банк. Обозначим через M_i вектор денежных средств, сдаваемых i -м пунктом. Имеют ли смысл (и какой именно) векторы $M_1 + M_2$, $M_1 + M_2 + M_3$?

Решение ясно. Но далеко не всегда сложение векторов имеет ясный содержательный смысл. В приведенной задаче такой смысл есть. Но если трехмерный вектор есть (размер бюста, окружность талии, объем бедер), то трудно придать какой-нибудь содержательный смысл сложению таких векторов.

2. При нормальной ($\lambda_1 = 1$) интенсивности работы велосипедный завод производит в месяц $G_1 = (30, 40, 60)$ мужских, женских и детских велосипедов, а при интенсивности $0 \leq \lambda_1 \leq 4$ производит $\lambda_1 G_1$ велосипедов. (Будем округлять нецелые числа до целых, при необходимости.) Сколько велосипедов производит завод в месяц при интенсивности $\lambda_1 = 2; 3; 0,5; 0,6$? Второй завод при $\lambda_2 = 1$ производит

в месяц $G_2 = (40, 50, 60)$ таких же велосипедов. Сколько (и каких) велосипедов производят оба завода при $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 2); (2, 3)$?

3. При нормальной ($\lambda = 1$) интенсивности работы завод потребляет ресурсов $R = (20, 40)$ и выпускает продукции $V = (10, 30)$, а при интенсивности $0 \leq \lambda \leq 4$ — в λ раз больше и ресурсов потребляет и продукции выпускает. Опишите пары (ресурсы, продукция) при $\lambda = 2; 3; 2,5$. Найдите вектор потребляемых ресурсов, потребных для выпуска продукции $(20, 60); (15, 45)$; найдите, сколько будет выпущено продукции, если ресурсов потреблено $(25, 50); (30, 60)$.

4. Укажите те пары λ, μ из приведенных далее, когда линейная комбинация $\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \end{pmatrix}$ есть неотрицательный вектор: $(1, 1); (6, 1); (-1, -1); (2, -1)$.

5. Является ли линейно зависимой система трех векторов $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$? Найдите все базисы этой системы.

6. В пространстве двух товаров с ценами $(3, 5)$ укажите несколько наборов товаров стоимостью 15, 30, 45. Пусть цены изменились и стали $(4, 4)$. Приведите примеры наборов товаров, которые подешевели, подорожали, остались той же стоимости.

7. Магазин торгует гвоздями двух видов: 25 и 40 мм. Масса гвоздей соответственно 5 и 10 г, цена 5 и 7 руб. за 1 кг. Покупатель, ведущий ремонт, хотел бы купить гвоздей на 10 руб. Опишите доступные ему на эту сумму наборы гвоздей. Подскажите покупателю, сколько и каких гвоздей ему купить, если он хотел бы:

- купить гвоздей как можно меньше по массе;
- как можно больше по длине;
- купить гвоздей длиной 40 мм в два раза больше по массе, чем гвоздей 25 мм.

1.2. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

1. Начальные сведения о матрицах. *Матрицей* называется прямоугольная таблица чисел. Так, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ есть матрица с двумя строками и тремя столбцами. Обозначим ее A .

Обычно элементы матрицы обозначаются теми же буквами, что и матрица, но строчными: $A = (a_{ij})$. В этой матрице всего 6 элементов: $a_{11} = 2, a_{12} = 3, a_{13} = 0, a_{21} = 1, a_{22} = 0, a_{23} = 4$ (надо читать эти элементы так: a_{11} — а-один-один, a_{12} — а-один-два и т.д.). Число строк и число столбцов в матрице называются ее *размерами*, причем число строк называют первым. Итак, A есть матрица размером 2×3 .

Две матрицы считаются *равными* (одинаковыми) тогда и только тогда, если у них совпадают их размеры, т.е. число строк и число столбцов, и совпадают сами строки и столбцы. Пусть, например, $A = (a_{ij})$ есть матрица $m \times n$ и $B = (b_{ij})$ есть матрица $k \times s$; тогда $A = B$, если и только если $k = m$, $s = n$ и $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$. Таким образом, бессмысленно говорить о равенстве матриц при несовпадении их размеров.

Если число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*. В квадратной матрице элементы a_{ii} образуют главную диагональ матрицы. Если в квадратной матрице все элементы — нули и только на главной диагонали все элементы есть единицы, то такая

матрица называется *единичной*. Так, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ есть единичная

матрица размера 3. В каждой размерности есть своя единичная матрица.

Рассмотрим матрицу A размерами $m \times n$. Каждую ее строку можно считать вектором-строкой размерности n и каждый столбец — вектором-столбцом размерности m . Обозначим i -ю строку-вектор $\overline{a_i}$, j -й столбец-вектор A_j , тогда матрицу A можно представить упорядоченным набором векторов-строк: $A = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \vdots \\ \overline{a_m} \end{pmatrix}$ или упорядоченным набором векторов-столбцов: $A = (A_1, \dots, A_n)$.

Заметим, что векторы можно рассматривать как частный случай матриц. Так, вектор-строка может рассматриваться как матрица с одной строкой; аналогично вектор-столбец — как матрица с одним столбцом.

2. Действия с матрицами. Эти действия напоминают действия с векторами.

Умножение матрицы на число. Любую матрицу можно умножить на любое число. Для этого каждый элемент матрицы умножается на это число и эти произведения образуют матрицу-результат. Например, умножим матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ на 2. Получим матрицу $2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, т.е. при умножении матрицы на число множитель «вносится» под знак матрицы.

Сложение матриц. Любые две матрицы одних и тех же размеров можно сложить. Получится матрица в точности тех же размеров. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, тогда матрица-сумма $A + B$ состоит из элементов $a_{ij} + b_{ij}$, т.е. при сложении матриц складываются их элементы, стоящие на одинаковых местах.

Однако матрицы разных размеров складывать нельзя (даже если у них одинаков какой-нибудь один размер; например, если число строк одно и то же, а число столбцов разное, то такие матрицы складывать нельзя).

Операция матриц ассоциативна, т.е. $(A + B) + C = A + (B + C)$ — это свойство позволяет складывать любое конечное число матриц.

Умножение матриц. Иногда (именно иногда, а не всегда!) матрицы можно умножить одну на другую. Заметим сразу же, что порядок перемножения матриц важен. Поэтому опишем, когда матрицу A размерами $m \times n$ можно умножить на матрицу B размерами $k \times s$, при этом A будет стоять слева, а B справа, т.е. попробуем найти произведение AB .

Произведение AB существует тогда и только тогда, если $n = k$; обозначим $n = k$ через r . При этом в результате получается матрица C размерами $m \times s$; ее элемент $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj}$ или (с использованием знака суммирования) $c_{ij} = \sum_{r=1}^r a_{ir} b_{rj}$.

Пусть, например, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, тогда $AB = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Кстати, произведение BA также существует и равно $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Мы видим, что $AB \neq BA$. Следовательно, умножение матриц некоммутативно, т.е. зависит от порядка сомножителей. Если матрицу V нельзя умножить на матрицу W , то говорят также, что произведение VW не существует.

Так как векторы можно считать частными случаями матриц, то можно (иногда опять-таки!) перемножать матрицы и векторы и даже только векторы друг с другом по только что описанному правилу перемножения матриц.

Пусть A — матрица размерами $m \times n$, Y — вектор-строка размерности s и X — вектор-столбец размерности k . Тогда матрицу слева можно умножить только на вектор-столбец, причем должно быть $n = k$ и получится вектор-столбец размерности m . Матрицу справа можно умножить только на вектор-строку, причем должно быть

$s = m$ и получится вектор-строка размерности n . Умножить вектор-строку на вектор-столбец можно только тогда, если у них размерность одинакова — получится матрица из одной строки и одного столбца, такую матрицу можно считать просто числом. Можно умножить любой вектор-столбец на любую вектор-строку (как матрицы) — получится матрица, число строк у которой — как у вектора-столбца, а столбцов — как у вектора-строки.

Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $Y = (4, -1)$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; тогда

$$AX = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}, YA = (7, 12, -4), XY = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что произведения XA , AY , YX не существуют.

Транспонирование матриц. Так же как и векторы, матрицы можно транспонировать — менять местами строки и столбцы, т.е. 1-я строка исходной матрицы становится 1-м столбцом транспонированной матрицы, 2-я строка — 2-м столбцом и т.д. Пусть

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ — исходная матрица, тогда матрица, транспонирован-

ная к ней, есть $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Легко видеть, что если исходная есть матрица размерами $m \times n$, то транспонированная к ней есть матрица размерами $n \times m$. Так же как для векторов, операция транспонирования, осуществленная последовательно дважды, дает исходную матрицу: $(A^T)^T = A$.

3. Технологическая матрица и задача оптимального планирования. Матрицы широко используются во всех областях науки, в том числе в экономической. Многие обозначения при использовании матриц очень компактны, при этом без потери в наглядности и содержательности. Для примера рассмотрим так называемую технологическую матрицу.

Пусть предприятие из m видов ресурсов производит n видов продукции. Предположим, что для производства одной единицы (ед.) j -го вида продукции расходуется a_{ij} ед. i -го вида ресурса, т.е. a_{ij} — норма расхода i -го ресурса на производство j -й продукции. Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из норм расхода, называется *матрицей норм расхода*. Технологической же ее называют вот почему. Рассмотрим какой-нибудь j -й, столбец A_j этой матрицы. Этот столбец

полностью описывает расход ресурсов на производство 1 ед. j -й продукции. Говоря абстрактно, для получения 1 ед. j -й продукции надо «смешать» a_{1j} ед. 1-го ресурса, a_{2j} ед. 2-го и т.д. Такое «смешивание» вполне правильно назвать технологией переработки ресурсов. Таким образом, j -й столбец матрицы A описывает j -ю технологию переработки ресурсов. Всего предприятие располагает n технологиями.

Остановимся теперь на содержательном смысле строк матрицы норм расхода (или технологической). Как легко видеть, элементы i -й строки описывают расход i -го ресурса на единицу каждой продукции или при единичной интенсивности каждой технологии.

Вернемся к технологической матрице для более глубокого усвоения. Рассмотрим план производства x_1 ед. 1-й продукции, x_2 ед. 2-й и вообще x_j ед. j -й продукции. Такой план представим векто-

ром-столбцом $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Заметим, что для осуществления такого

плана понадобится $\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j$ ед. 1-го ресурса, $\sum_{j=1}^n a_{2j} x_j$ ед. 2-го и вооб-

ще $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ ед. i -го ресурса. Оказывается, что такие количества ресурсов есть компоненты вектора-столбца AX , если выполнить умножение матрицы A норм расхода слева на вектор-столбец X плана производства справа.

Введем еще величину *удельной прибыли* c_j — это прибыль от реализации одной единицы j -й продукции. Запишем все эти удельные прибыли в виде вектора-строки $C = (c_1, \dots, c_n)$. Тогда произведение $C \cdot X$ (скалярное, как векторов одинаковой размерности, или вектора-строки на вектор-столбец, как матриц) представляет собой величину прибыли, полученной при реализации X ед. произведенной продукции. Обозначим эту прибыль $P(X)$.

Пусть b_i обозначает количество единиц i -го ресурса, запасенного на складе. Запишем эти величины запасов в виде вектора-столбца

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Тогда матрично-векторное неравенство $AX \leq B$ означает

необходимость учитывать ограниченность запасов ресурсов при рассмотрении планов производства. Если это неравенство выполняется, значит, для плана X хватит имеющихся запасов ресурсов B и такой план является реальным, или, как говорят, допустимым.

Рассмотрим следующую задачу оптимального планирования: найти такой план производства, который бы был допустимым и обеспечивал наибольшую прибыль из всех допустимых планов.

Эту задачу (одну из важнейших во всей экономической теории) символически записывают так (ограничение $X \geq \bar{0}$ добавлено исходя из содержательного смысла задачи):

$$P(X) = C \cdot X \rightarrow \max,$$

$$AX \leq B,$$

$$X \geq \bar{0}.$$

Обозначим множество всех планов X , удовлетворяющих условиям: $X \geq \bar{0}$, $AX \leq B$, через $\mathcal{D}$ и назовем это множество *допустимым* (множеством допустимых планов); тогда указанную выше задачу можно сформулировать так: найти максимум функции прибыли $P(X)$ на множестве $\mathcal{D}$ допустимых планов:

$$P(X) \rightarrow \max,$$

$$X \in \mathcal{D}.$$

4. Матрицы и линейные преобразования. Рассмотрим какое-нибудь числовое линейное пространство, например двумерное R^2 . Тогда любая квадратная матрица A размера 2 задает линейное преобразование $\alpha: R^2 \rightarrow R^2$ по правилу: $\alpha(X) = AX$. Линейность преобразования α означает, что $\alpha(X + Y) = \alpha(X) + \alpha(Y)$ и $\alpha(\lambda X) = \lambda \cdot \alpha(X)$ для любых векторов X, Y и любого числа λ . В частности, отсюда следует, что нулевой вектор переходит в себя.

Пример 1. Убедитесь в том, что:

а) единичная матрица $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ задает тождественное отображение пространства на себя;

б) матрица $S_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ умножает вектор на число λ ;

в) матрица $S' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ переставляет компоненты вектора;

г) матрица $S_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ оставляет 1-ю компоненту вектора неизменной, а 2-ю делает суммой обеих прежних компонент.

Примечание. В математике понятие «матрица» может обозначать прямоугольную таблицу не только чисел. Это более общее понятие матрицы иногда используется в нашем курсе далее.

ЗАДАЧИ

1. Найдите все возможные попарные произведения матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ и векторов $X = (2, -3)$, $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, затем найдите произведение $XA Y$.

Ответ. $A Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$, $XA = (4, -10)$, $X Y = (-10) = -10$, $Y X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$,

$$X A Y = (X A) Y = (4, -10) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -36.$$

2. Решите матрично-векторные уравнения:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Рассмотрим только первое уравнение. Сначала надо сообразить, что X не может быть числом, а может быть только матрицей 2×2 . После этого надо обозначить неизвестные элементы этой

матрицы $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ и, умножая матрицу A на матрицу X , получить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_{11} + x_{21} = 1, \\ 2x_{12} + x_{22} = 3, \\ 4x_{11} + 2x_{21} = 2, \\ 4x_{12} + 2x_{22} = 6, \end{cases}$$

после чего решить ее.

Ответ. Решений бесконечно много. Вот множество решений:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 1 - 2x_{11} & 3 - 2x_{12} \end{pmatrix}; x_{11}, x_{12} \in R \right\}.$$

3. Рассмотрите матрицы $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Убедитесь в том, что $X Y \neq Y X$. Еще раз подтверждается, что умножение матриц некоммукативно, т.е. зависит от порядка сомножителей.

4. Цех делает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида нужно 5 кг железа и 3 кг проволоки, второго вида — 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации одного трансформатора цех получает прибыль 6 и 5 дол. соответственно. Цех рас-

полагает 4,8 т железа и 3 т проволоки. Сколько видов продукции производит цех? Сколько видов ресурсов используется? Составьте матрицу норм расхода, векторы удельной прибыли и запасов ресурсов. Рассмотрите несколько планов производства и определите, какие

из них допустимы. Например, допустимы ли планы $\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}$?

Решение. Вектор удельных прибылей $C = (6, 5)$. Вектор запасов ресурсов $B = \begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix}$. Матрица норм расхода $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Видов продукции — 2, видов ресурсов — 2. Чтобы определить, допустим ли план производства $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, надо либо непосредственно подсчитать

расход ресурсов на этот план и сравнить с имеющимися запасами, или проверить выполнение матрично-векторного неравенства $AX \leq B$. В итоге получаем, что оба плана допустимы.

5. На лесопилке из еловой и пихтовой древесины делают фанеру и брусы. На 100 кв. м фанеры нужно 2 куб. м еловой и 6 куб. м пихтовой древесины и прибыль равна 170 дол. На 100 пог. м (т.е. по длине) елового бруса нужно 5 куб. м, а на 100 пог. м пихтового бруса нужно 4 куб. м древесины, прибыль же равна соответственно 80 и 100 дол. Сколько видов продукции производит лесопилка? Сколько видов ресурсов используется? Составьте матрицу норм расхода, векторы удельной прибыли и запасов ресурсов. Докажите, что фанеру производить невыгодно, и найдите план, дающий максимальную прибыль.

6. Возведите матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ в квадрат, в третью степень.

Указание. Возвести матрицу в квадрат — это значит умножить ее на самое себя. Когда найдете квадрат данной матрицы, надо умножить этот квадрат еще раз на данную матрицу, тогда и получите третью степень данной матрицы.

7. Пусть E — единичная матрица. Проверьте, что если произведение XE (EX) существует, то $XE = X$ ($EX = X$), какова бы ни была матрица X .

8. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Проверьте, что $AB = BA = E_2$,

где E_2 — единичная матрица 2-го порядка. Матрицы X, Y такие, что $XY = YX = E$, где E — единичная матрица, называются *обратными* друг к другу, т.е. матрица Y является обратной к X и часто обозначается X^{-1} , а матрица X является обратной к Y и также обозначается Y^{-1} .

9. Для пространства R^3 напишите матрицы, которые: а) умножает 1-ю компоненту вектора на 3, 2-ю — на 2, 3-ю оставляет неизменной; б) делает 3-ю компоненту суммой всех трех прежних компонент, 2-ю компоненту делает суммой прежних 1-й и 2-й; а 1-ю компоненту оставляет неизменной.

10. Убедитесь на конкретных примерах, что если Y — неотрицательная вектор-строка, A — матрица, X, B — векторы-столбцы, то неравенство $AX \leq B$ сохранится при умножении его слева на Y . Вспомните правила действий с обычными неравенствами.

1.3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

1. Начальные сведения о СЛАУ. Многочисленные задачи сводятся в итоге к решению систем линейных алгебраических уравнений. Вот задача-шутка (шутка ли?, сказка — ложь, да в ней намек!).

«Задача о разведчике». В засекреченном городке около 100 000 рабочих работало на 3 крупных заводах, других заводов в городке не было. Разведчику удалось достать данные о текучести кадров: за год из каждой тысячи работающих с завода A 20 чел. переходят на завод B и 15 чел. на завод C и т.д. (рис. 1). Городок жил стабильной спокойной жизнью уже много лет. В этих условиях разведчик сумел установить численность рабочих на каждом заводе. Сумеете ли сделать это вы?

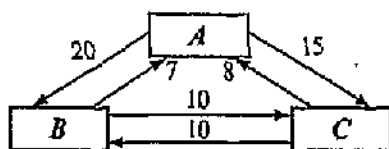


Рис. 1

Решение. Сумеем. Фраза «Городок жил стабильной спокойной жизнью...» является ключевой. Она означает, что сколько с каждого завода за год увольняется рабочих, столько же и принимается на него. Отсюда, обозначая численность рабочих на заводе A через a

и т.д., получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A: 35a/1000 = 7b/1000 + 8c/1000, \\ B: 17b/1000 = 20a/1000 + 10c/1000, \\ C: 18c/1000 = 15a/1000 + 10b/1000, \\ a + b + c = 100\,000. \end{cases}$$

Решив СЛАУ, получим ответ: $a = 17\,600$, $b = 43\,600$, $c = 38\,800$.

В линейной алгебре СЛАУ появляется всякий раз, когда хотим выяснить, является ли какой-нибудь вектор линейной комбинацией некоторых других векторов. Такая задача уже рассматривалась (см. п. 3, раздел 1.1). Рассмотрим несколько важных понятий, относящихся к СЛАУ.

СЛАУ называется *совместной*, *определенной*, *неопределенной*, *несовместной*, если она соответственно имеет хотя бы одно решение, имеет ровно одно решение, имеет более одного решения, не имеет решений.

Отметим, что несовместная система — это система, не являющаяся совместной. Вот примеры всех четырех систем (в порядке, перечисленном выше):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 5, \end{cases} \begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 2, \end{cases} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 = 7. \end{cases}$$

2. Векторная и матрично-векторная запись СЛАУ. Пусть дана СЛАУ из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Через $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ обозначим n -мерный столбец пере-

менных и m -мерный столбец свободных членов, соответственно A — матрица коэффициентов и в ней $A_1, \dots, A_n$ — составляющие ее векторы-столбцы. Тогда можно следующим образом записать данную СЛАУ.

В векторном виде: $x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = B$. И тогда решить СЛАУ означает найти всевозможные разложения вектора B по векторам $A_1, \dots, A_n$, т.е. найти всевозможные наборы чисел $x_1, \dots, x_n$, таких, что вектор B есть линейная комбинация векторов с коэффициентами из какого-нибудь такого набора. Каждый такой набор есть n -мерный вектор, следовательно, множество решений M рассматриваемой СЛАУ есть некоторое подмножество n -мерного числового линейного пространства R^n .

СЛАУ будет совместной, определенной, неопределенной, несовместной, если вектор B имеет хотя бы одно решение — представление в виде линейной комбинации векторов $A_1, \dots, A_n$, ровно одно такое представление, более одного представления, не является линейной комбинацией этих векторов, или: $|M| \geq 1$, $|M| = 1$, $|M| > 1$, $|M| = \emptyset$.

В матричном виде СЛАУ записывается кратко и образно: $AX = B$ (сравните с обычным уравнением первой степени $ax = b$).

Существует очень красивая и стройная теория СЛАУ. Однако нам она не понадобится, кроме некоторых фрагментов.

Две СЛАУ называются эквивалентными, если каждое решение одной из них есть решение другой, и наоборот, т.е. если множество решений у них одно и то же. Следующие два вида преобразований СЛАУ называются элементарными:

- 1) умножение или деление одного из уравнений на число, не равное 0;
- 2) прибавление к одному из уравнений другого уравнения.

Утверждение. Эквивалентные преобразования СЛАУ, даже выполненные последовательно любое число раз, дают СЛАУ, эквивалентную исходной.

Для решения СЛАУ часто используется широко известный метод последовательного исключения неизвестных или его модификация — так называемый метод Жордана—Гаусса. Суть этого метода состоит в том, что СЛАУ, скажем, 3-го порядка элементарными преобразованиями приводится к виду, который называется *треугольным* или *трапецевидным*.

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = b'_1, \\ \phantom{a'_{11}x_1} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \phantom{a'_{11}x_1} \phantom{a'_{22}x_2} a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Решение этой системы (эквивалентной исходной) найти легко. Оно будет, следовательно, и решением исходной СЛАУ.

Пример 1. Решить СЛАУ методом Жордана—Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение ирочную оформляют в виде специальных таблиц, но делать так не обязательно. Суть метода — в последовательном исключении неизвестных.

На 1-м шаге исключим x_1 из всех уравнений, кроме первого:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_2 - x_3 = -9, \\ 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

На 2-м шаге исключим x_2 из всех уравнений, кроме второго:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3, \\ -3x_2 - x_3 = -9, \\ 5x_2 = 10. \end{cases}$$

На 3-м шаге исключим x_2 из всех уравнений, кроме третьего:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ -x_3 = -3, \\ 5x_2 = 10. \end{cases}$$

Но решение этой СЛАУ очевидно: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

3. Определитель матрицы. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — квадратная матрица 2-го порядка. *Определителем* матрицы A называется число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Определитель обозначается $\Delta(A)$ или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Определитель матрицы 3-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

вычисляется так: $\Delta(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Так, минором элемента a_{11} вышенаписанного определителя 3-го порядка

является определитель $\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^s$, где s — сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Свойства определителей:

- 1) определитель не изменится при замене строк столбцами, т.е. определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы;
- 2) перестановка двух строк (столбцов) определителя равносильна умножению его на минус единицу;
- 3) если определитель имеет две одинаковые строки (столбца), то он равен нулю;

- 4) общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя;
- 5) определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число;
- 6) определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца), например i -й, на их алгебраические дополнения, т.е. $\Delta(A) = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}$ или $\Delta(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}$, где A_{ik} — алгебраические дополнения элементов a_{ik} .

Эти свойства позволяют найти определитель любой квадратной матрицы. Однако нахождение определителя, например, 5-го порядка вручную довольно трудоемко. При необходимости нужно воспользоваться компьютерными программами. Мы ограничимся только определителями не выше 4-го порядка.

Пример 2. Вычислить определитель 4-го порядка: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Раскладываем определитель по элементам 1-й строки: $\Delta = 1\Delta_{11} - 2\Delta_{12} + 3\Delta_{13} - 4\Delta_{14}$. Находим Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{14} . Это все определители 3-го порядка. Найдем, к примеру, Δ_{11} :

$$\Delta_{11} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 - 3 + 1 = 0.$$

Так же находим $\Delta_{12} = -1$, $\Delta_{13} = -1$, $\Delta_{14} = -1$. Окончательно $\Delta = 3$.

4. Решение СЛАУ с помощью определителей. Рассмотрим СЛАУ из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда, если $\Delta \neq 0$, то СЛАУ имеет единственное решение (формулы Крамера): $x_1 = \Delta_1/\Delta$, $x_2 = \Delta_2/\Delta$, $x_3 = \Delta_3/\Delta$.

Отметим, что аналогичные формулы применяются для решения любых СЛАУ, в которых число уравнений равно числу неизвестных и определитель матрицы из коэффициентов при неизвестных не равен нулю.

Пример 3. Решить СЛАУ по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 20. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -1/-1 = 1$, $x_2 = -2/-1 = 2$, $x_3 = -3/-1 = 3$.

5. Обратная матрица. Пусть A — какая-нибудь матрица. Тогда матрица B называется *обратной* к ней, если $AB = BA = E$, где E — некоторая единичная матрица.

Весьма прозрачная аналогия с числами: для числа 2 число $1/2$ есть обратное, так как $2 \cdot 1/2 = 1$. Именно поэтому матрица, обратная к A , обозначается A^{-1} .

Предложение. Только квадратная матрица может иметь обратную.

Доказательство. Как известно, единичная матрица — матрица квадратная, пусть E имеет s строк и столько же столбцов. Пусть матрица A имеет размеры $m \times n$, а матрица $B — k \times l$. Тогда из того, что $AB = E$ вытекает: $m = s$, $n = k$, а из того, что $BA = E$ вытекает: $k = m$, $l = s$. Следовательно, $m = k = n$, что и требовалось доказать (еще получаем: $k = l = m = n$, т.е. A и B — квадратные матрицы).

Для нахождения обратной матрицы можно использовать следующий алгоритм (исходная матрица обозначена A):

- 0) смотрим, квадратная ли матрица; если нет, обратной матрицы не существует; если квадратная, переходим к п. 1;
- 1) вычислим определитель $\Delta(A)$; если он равен нулю, обратной матрицы не существует; если он не равен нулю, переходим к п. 2;
- 2) вместо каждого элемента матрицы ставим его алгебраическое дополнение;
- 3) полученную матрицу транспонируем;
- 4) каждый элемент полученной матрицы делим на определитель исходной матрицы $\Delta(A)$ и получаем матрицу, обратную данной.

Пример 4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Определитель $\Delta(A) = 1$, значит, обратная матрица существует. Ставим вместо каждого элемента его алгебраическое

дополнение, получаем матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Транспонируем и делим на $\Delta(A) = 1$.

Матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ — обратная к A .

$$\text{Проверка: } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица полезна во многих ситуациях.

Пример 5. Решим, например, матричное уравнение $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Мы только что нашли матрицу A^{-1} , обратную к матрице A . Умножим наше уравнение слева на матрицу A^{-1} : $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Но $A^{-1}A = E$, значит, $X = A^{-1}B$. Итак, решение уравнения есть матрица $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\text{Проверка: } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находить обратную матрицу к матрице большой размерности весьма трудоемко. Надо обязательно использовать компьютер. При этом, тем не менее, остается трудность ввода в компьютер элементов самой матрицы. Представим, что надо ввести в компьютер матрицу из 100 строк и 100 столбцов. Это 10 000 элементов. Если эти элементы есть числа вида 36, 23, т.е. два знака до запятой и два после запятой, да еще сама запятая, то надо ввести 50 000 знаков. Если на каждый знак тратить 1 с (надо ведь работать надежно, без ошибок!), то для ввода понадобится $50\,000 : 3600$, т.е. примерно 16 ч.

ЗАДАЧИ

1. Найти все α , при каждом из которых СЛАУ $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 = 1, \\ \alpha x_1 + x_2 = \alpha^2 \end{cases}$

несовместна, неопределенна, определена, совместна.

Решение. Выразим x_1 из первого уравнения и подставим во второе. Получим уже одно уравнение: $(1 - \alpha^2)x_2 = \alpha^2 - \alpha$. Если $\alpha \neq \pm 1$, то это уравнение имеет единственное решение $x_2 = -\alpha/(1 + \alpha)$ и система тоже имеет единственное решение $x_1 = (1 + \alpha + \alpha^2)/(1 + \alpha)$, $x_2 = -\alpha/(1 + \alpha)$. Если же $\alpha = \pm 1$, то случаи $\alpha = 1$ и $\alpha = -1$ надо исследовать особо. При $\alpha = 1$ получаем, что уравнение $(1 - \alpha^2)x_2 = \alpha^2 - \alpha$ имеет бесконечно много решений — каждое число есть его решение. Значит, и система имеет бесконечно много решений. При $\alpha = -1$ уравнение $(1 - \alpha^2)x_2 = \alpha^2 - \alpha$ не имеет решений, значит, и система не имеет решений. Итак, окончательно получаем: СЛАУ не-

совместна при $\alpha = -1$, неопределенна при $\alpha = 1$, определена при $\alpha \neq \pm 1$ и совместна при $\alpha \neq -1$.

2. Введите необходимые векторы и матрицу и запишите СЛАУ в векторном и матрично-векторном виде:

$$\begin{cases} 2x_2 - x_1 + x_3 = 6, \\ x_3 - 8 + x_1 = x_2, \\ x_1 - 10 + x_3 = 0. \end{cases}$$

3. Последовательно исключая неизвестные, приведите СЛАУ к треугольному виду и найдите ее решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ 4x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

4. Решите СЛАУ по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

5. При каком соотношении параметров a, b, c матрица не имеет обратной? Укажите хотя бы одну тройку параметров, чтобы матрица не имела обратной:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

6. Для каждой из данных матриц найдите обратную:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Вычислите определитель квадратной матрицы n -го порядка, у которой на главной диагонали стоит число n .

Указание. Используйте индукцию.

8. Можно доказать, что определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей. Проверьте это для мат-

рицы $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, возведенной в квадрат, в куб.

9. Выведите из предыдущей задачи, что определитель обратной матрицы (если она существует) есть число, обратное к определителю исходной матрицы.

Указание. Докажите, что определитель единичной матрицы равен 1.

10. Докажите, что если СЛАУ имеет хотя бы два решения, то решений у нее бесконечно много.

11. СЛАУ называется *однородной*, если все свободные члены равны нулю. Докажите, что если такая СЛАУ имеет ненулевое решение, то решений у нее бесконечно много.

12. Найдите матрицу, задающую линейное преобразование R^2 в себя, переводящее вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ в $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, а вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ в $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Указание. Решите матричное уравнение $XA = B$, где X — искомая матрица, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

13. Пусть α, β — линейные преобразования пространства R^2 , заданные матрицами A, B . Если их выполнить последовательно, одно за другим, то результирующее преобразование задается матрицей-произведением (в том же порядке). Найдите матрицу, осуществляющую преобразование $\alpha \cdot \beta, \beta \cdot \alpha$.

14. Докажите, что в пространстве R^2 любые два несорпропорциональных вектора образуют базис.

15. Докажите, что в пространстве двух товаров любой набор может быть получен в виде комбинации $\alpha X + \beta Y$ двух непропорциональных наборов товаров, однако не всегда коэффициенты α, β будут неотрицательными.

Указание. Используйте предыдущую задачу.

Тема 2.

ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Основные сведения о системе координат на прямой и о прямоугольной системе координат на плоскости и в пространстве считаются известными. Считаются известными также основные сведения о свободных векторах («свободных направленных отрезках»),

о связи координат точки с проекциями ее радиус-вектора и некоторые подобные сведения.

2.1. ПРЯМЫЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ. ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Прямая линия на плоскости, различные виды уравнений прямой. Пусть точка $O(0, 0)$ есть начало координат, точка пересечения горизонтальной OX и вертикальной OY осей координат (рис. 1). На этих осях фиксированы единицы длины, обозначенные отрезками OM , ON . На горизонтальной оси, направленной вправо, будем откладывать координату x , на вертикальной, направленной вверх, координату y . На рисунке на плоскости нанесены различные точки.

Уравнением линии на плоскости называется равенство $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей этой линии, и не удовлетворяют координаты любой точки, не принадлежащей этой линии.

Известно, что любое линейное уравнение с двумя переменными $ax + by = c$ определяет прямую линию на плоскости. Покажем, как наиболее рационально строить прямые линии, заданные линейными уравнениями разного вида.

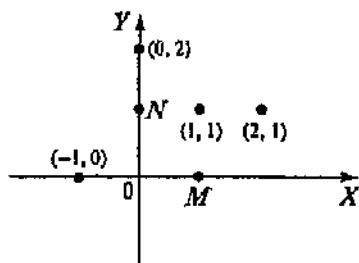


Рис. 1

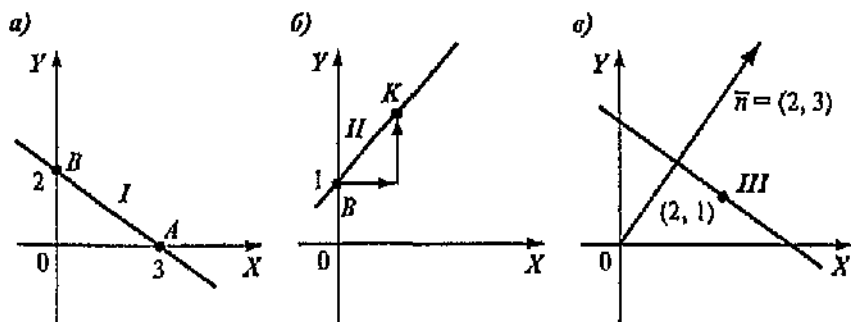


Рис. 2

Например, требуется построить прямую по точкам пересечения ее с осями координат. Так удобно строить прямую, заданную уравнением $ax + by = c$, например $2x + 3y = 6$. Действительно, для нахождения точки пересечения этой прямой с осью OX надо положить

$y = 0$, получим $x = 3$, т.е. точку A (рис. 2, а). Аналогично, для нахождения точки пересечения с осью OY надо положить $x = 0$, получим $y = 2$, т.е. точку B . Через эти две точки и проводим искомую прямую I . Это же уравнение можно переписать так: $x/3 + y/2 = 6$. Такой вид уравнения называется *уравнением в отрезках*.

Если же прямая задана уравнением $y = kx + b$, например $y = 2x + 1$, то ее удобно строить по-другому, а именно: на вертикальной оси найдем точку $B = 1$ ($b = 1$ ед.) (рис. 2, б), затем «отойдем» от нее на 1 ед. вправо по горизонтали и после этого «поднимемся» вверх на $k = 2$ ед. Через полученную точку K и через точку B и проведем искомую прямую II .

Иногда надо построить прямую, проходящую через данную точку перпендикулярно данному вектору — нормальному вектору прямой. Пусть точка есть (x_0, y_0) , вектор $\vec{n} = (a, b)$, тогда уравнение прямой есть $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$. Поэтому уравнение прямой III (рис. 2, в), заданной в виде $2(x - 2) + 3(y - 1) = 0$, надо строить именно так: провести ее перпендикулярно вектору $(2, 3)$ через точку $(2, 1)$.

Приведем еще некоторые сведения справочного характера. Если прямая проходит через точку (x_0, y_0) , то ее уравнение имеет вид $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ при некоторых a, b .

Уравнение прямой, проходящей через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) , есть $(x - x_0)/(x_1 - x_0) = (y - y_0)/(y_1 - y_0)$.

Угол φ между прямыми с угловыми коэффициентами k_1, k_2 находится по формуле $\operatorname{tg} \varphi = (k_1 - k_2)/(1 + k_1 k_2)$.

Необходимым и достаточным условием параллельности прямых является равенство их угловых коэффициентов: $k_1 = k_2$ (рис. 3).

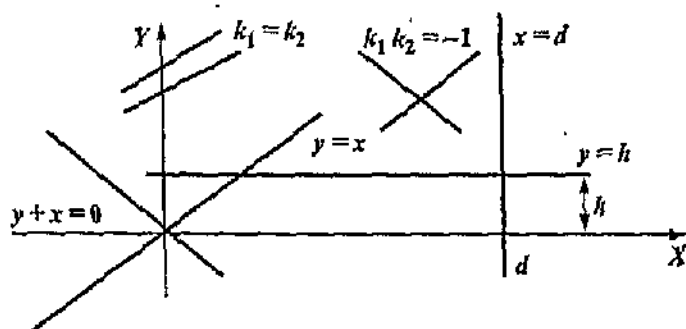


Рис. 3

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности прямых является равенство $k_1 k_2 = -1$, если они заданы уравнениями

вида $y = kx + b$, или $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$, если они заданы уравнениями вида $ax + by = c$.

Точка пересечения прямых $a_1 x + b_1 y = c_1$, $a_2 x + b_2 y = c_2$ определяется как решение системы уравнений
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

Горизонтальные прямые имеют уравнение $y = h$, вертикальные прямые имеют уравнения $x = d$. Биссектриса 1-го квадранта имеет уравнение $y = x$, биссектриса 2-го квадранта имеет уравнение $y + x = 0$ (рис. 3).

2. Линейные функции спроса и предложения, определение равновесной цены. Рассмотрим какой-нибудь товар. При данной цене p за единицу товара обозначим $D(p)$ число единиц товара, которые покупатели на рынке желают купить. Эта функция $D(p)$ называется *функцией спроса на товар*. Она убывающая, примерный вид ее показан на рис. 4. С другой стороны, пусть $S(p)$ — число единиц товара, которые предлагают продавцы для продажи на рынке. Эта функция называется *функцией предложения товара*. Она возрастающая, примерный вид приведен на рис. 5.

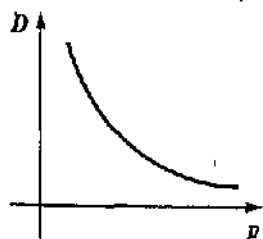


Рис. 4

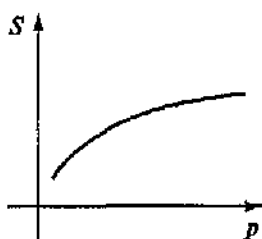


Рис. 5

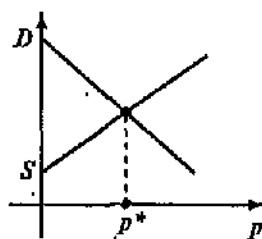


Рис. 6

Цена, при которой спрос и предложение равны, называется *равновесной*. Итак, $D(p^*) = S(p^*)$ при равновесной цене p^* (рис. 6).

Предположим, что функции спроса и предложения линейны (это допущение может быть справедливым в некоторых границах). Например, пусть $D(p) = 40 - p$, $S(p) = 10 + 2p$. Тогда равновесная цена находится из решения уравнения: $40 - p = 10 + 2p$, т.е. $p = 10$.

3. Бюджетное множество. Рассмотрим n -мерное пространство товаров S . Пусть вектор цен есть P , тогда стоимость набора товаров

X есть $PX = \sum_{i=1}^n p_i x_i$. Будем писать $X \sim Y$, если наборы X , Y стоят одинаково. Это отношение равной стоимости есть отношение экви-

валентности на пространстве товаров, т.е. оно: а) симметрично: если $X \sim Y$, то и $Y \sim X$; б) транзитивно: если $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то $X \sim Z$; в) рефлексивно: $X \sim X$ для любого набора $X \in C$.

Можно придумать и много других отношений эквивалентности на пространстве товаров.

Рассмотрим пространство двух товаров. Легко видеть, что наборы товаров одной и той же стоимости c образуют часть прямой линии L_c с уравнением $p_1x_1 + p_2x_2 = c$, расположенной в 1-м квадранте. Эта прямая перпендикулярна вектору цен.

Если $e < c$, то прямая L_e с уравнением $p_1x_1 + p_2x_2 = e$ параллельна прямой L_c и лежит ближе к началу координат.

Пусть фиксирована какая-то денежная сумма Q — она еще называется *доходом*. Множество всех наборов товаров стоимостью не более Q называется *бюджетным множеством* и обозначается B .

Бюджетное множество можно определить с помощью обычных или векторных неравенств так: $B(P, Q) = \{X \in C: p_1x_1 + \dots + p_nx_n \leq Q\}$ или $B(P, Q) = \{X \in C: PX \leq Q\}$.

Границей бюджетного множества G называется множество наборов товаров, которые стоят ровно Q .

Границу бюджетного множества можно определить с помощью обычных или векторных неравенств так: $G(P, Q) = \{X \in C: p_1x_1 + \dots + p_nx_n = Q\}$ или $G(P, Q) = \{X \in C: PX = Q\}$ (напомним, что пространство товаров состоит из неотрицательных наборов-векторов.)

Если пространство товаров двумерно или трехмерно, то бюджетное множество можно изобразить наглядно, особенно в двумерном случае. На рис. 7 изображены бюджетные множества при различных ценах P и доходах Q .

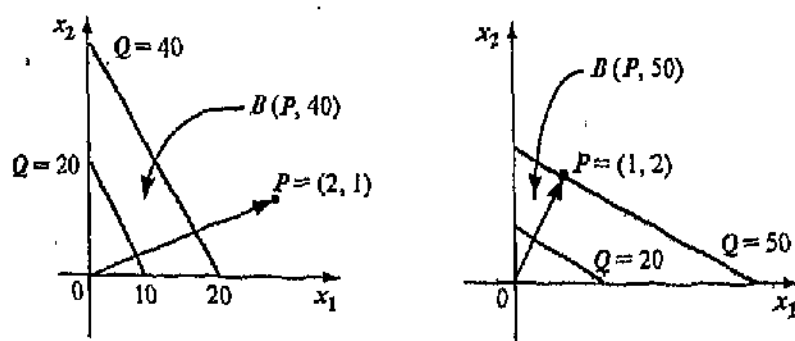


Рис. 7

Видно, что граница бюджетного множества перпендикулярна вектору цен и представляет собой отрезок между осями координат в 1-м квадранте.

В трехмерном случае бюджетное множество будет трехгранной пирамидой, а граница — одной из граней этой пирамиды, частью плоскости, зажатой в 1-м октанте.

Бюджетное множество $B(P, Q)$ зависит от цен P и дохода Q . При увеличении дохода его граница параллельно отодвигается дальше от начала координат, при уменьшении цен оно также увеличивается — точки пересечения его границы с осями координат отодвигаются от начала координат (см. рис. 7).

Пример 1. Рассмотрим пространство двух товаров. Назовем набор товаров *сбалансированным*, если 2-го товара ровно в два раза больше, чем 1-го. Если набор не сбалансирован, то излишек какого-нибудь товара сверх указанной пропорции не представляет никакой ценности и ценность (полезность) такого несбалансированного набора равна ценности (полезности) соответствующего сбалансированного набора. Убедитесь в том, что получившееся отношение есть отношение эквивалентности. Нарисуйте несколько классов этой эквивалентности.

Решение. Проверяем выполнение всех трех свойств — рефлексивности, симметричности и транзитивности. *Класс эквивалентности* — это такое максимальное множество, в котором любые два элемента эквивалентны. На рис. 8 показано несколько классов рассматриваемой эквивалентности. «Уголки» лежат на прямой $y = 2x$.

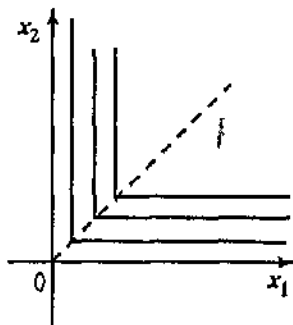


Рис. 8

4. Плоскости и прямые линии в пространстве. Уравнением поверхности в пространстве называется равенство $F(x, y, z) = 0$, которому удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей этой поверхности, и не удовлетворяют координаты любой точки, не принадлежащей этой поверхности.

Известно, что любое линейное уравнение с тремя переменными $ax + by + cz = d$ определяет плоскость в пространстве. Приведем некоторые сведения справочного характера.

Уравнение плоскости, проходящей через точки a на оси OX , b на оси OY и c на оси OZ есть $x/a + y/b + z/c = 1$.

Уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно вектору $\vec{n} = (a, b, c)$ (он называется нормальным вектором плоскости), есть $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Необходимым и достаточным условием параллельности плоскостей является пропорциональность их нормальных векторов.

Вертикальные плоскости, т.е. параллельные оси OZ , имеют уравнения вида $ax + by = c$. Горизонтальные плоскости, т.е. параллельные плоскости OXY , имеют уравнения $z = h$ и т.д.

Часто прямая линия в пространстве задается как пересечение двух плоскостей, т.е. как множество решений системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2. \end{cases}$$

Уравнение прямой, проходящей через точки (x_0, y_0, z_0) и (x_1, y_1, z_1) , есть $(x - x_0)/(x_1 - x_0) = (y - y_0)/(y_1 - y_0) = (z - z_0)/(z_1 - z_0)$.

ЗАДАЧИ

1. Постройте прямые линии, выбрав рациональный способ построения: а) $3x + 4y = 12$; б) $y = 2x - 1$; в) через точку $(1, 2)$ перпендикулярно вектору $(2, 3)$; г) $x/3 + y/5 = 1$.

2. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки: а) $(1, 2)$ и $(4, 5)$; б) $(-1, 0)$ и $(0, 0)$.

3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку и имеющую угловой коэффициент: а) $(0, 0)$, $k = 2$; б) $(-1, 0)$, $k = -1$.

4. Придумайте несколько линейных функций спроса и предложения, нарисуйте их графики (прямые линии) и найдите для каждого случая равновесную цену.

5. Для различных векторов цен нарисуйте несколько линий равной стоимости.

Например, $P = (2, 5)$. На рис. 9 линии MN , VW — стоимости соответственно 20 и 40 денежных единиц.

6. Линию на плоскости и в пространстве можно задать параметрически, задав зависимость каждой основной переменной от параметра. Например, $x = t$, $y = 2t + 1$ задает линию $y = 2x + 1$ на плоскости. Задайте параметрически линии $2x + 3y = 6$, $-8x + 4y = 16$.

Ответ: $x = 3t$, $y = 2 - 2t$; $x = 2t$, $y = 4 + 4t$.

7. Пересекает ли прямая $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 4t$ плоскость $2x + 3y + 4z = 0$?

8. Завод выпускает два товара и может работать с различной интенсивностью λ от 0 до 1 (это максимальная интенсивность).

При $\lambda = 1$ он выпускает набор $Q = (20, 40)$ товаров, а при интенсивности λ набор λQ . Опишите и графически изобразите множество наборов товаров, которые может выпускать завод.

9. Два завода выпускают одну и ту же продукцию двух видов. При работе соответственно с интенсивностями (λ_1, λ_2) первый про-

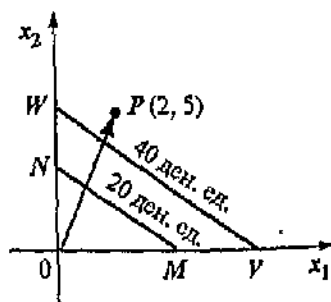


Рис. 9

изводит набор $\lambda_1 Q_1 = (10\lambda_1, 15\lambda_1)$, второй $\lambda_2 Q_2 = (20\lambda_2, 10\lambda_2)$, а вместе они дают набор $(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)$. Опишите и графически изобразите множество наборов товаров, которые заводы могут выпустить вместе.

10. В пространстве двух товаров рассмотрите эквивалентность, порожденную пропорцией: 1-го товара в наборе должно быть в 3 раза больше 2-го.

11. В пространстве двух товаров с данными ценами (2, 5) укажите графически множества наборов, которые стоят: а) ровно 40 ден. ед.; б) не более 60 ден. ед.; в) не менее 20 ден. ед.; г) не менее 30 и не более 40 ден. ед.

12. Для двух товаров проследите, как меняется бюджетное множество и его граница, если: а) меняется только доход; б) меняется цена только одного товара; в) меняются обе цены, но их соотношение остается постоянным.

13. В пространстве двух товаров заданы два вектора цен: $P = (2, 3)$ и $Q = (3, 4)$. Первый — это цены покупки, второй — цены продажи (подумайте об аналогии с ценой покупки и продажи долларов за рубли). Является ли отношение равной прибыльности отношением эквивалентности на наборах товаров?

14. В пространстве трех товаров с данными ценами (2, 3, 5) укажите графически множества наборов, которые стоят: а) ровно 40 ден. ед.; б) не более 60 ден. ед.; в) не менее 20 ден. ед.; г) не менее 30 и не более 40 ден. ед.

15. ЦБ России определил валютный коридор на 1997 г.: в начале года доллар стоит 5500 руб., в конце года — 6230 руб. (цифры условные). Найдите аппроксимирующую линейную зависимость курса доллара от номера дня 1997 г.

16. В пространстве двух товаров рассмотрим два непропорциональных набора A и B . Опишите множество всех наборов X , представимых в виде комбинации $\alpha X + \beta Y$ с неотрицательными α, β . Что представляет собой подобное множество в пространстве трех товаров? Какое условие заменяет в этом случае условие непропорциональности?

2.2. ВАЖНЕЙШИЕ КРИВЫЕ 2-го ПОРЯДКА. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Кривой 2-го порядка называется линия, уравнение которой является уравнением 2-го порядка относительно прямоугольных координат: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Уравнение 2-й степени определяет или окружность, или эллипс, или гиперболу, или параболу, или пару пересекающихся прямых, или пару параллельных прямых, или только одну точку, или множество точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, пусто.

Пример 1. Уравнение $x^2 - y^2 = 0$ определяет пару пересекающихся прямых $x - y = 0$ и $x + y = 0$.

Пример 2. Уравнение $y^2 - 4 = 0$ определяет пару параллельных прямых $y - 2 = 0$ и $y + 2 = 0$.

Пример 3. Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет одну точку $O(0, 0)$.

Пример 4. Уравнению $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не удовлетворяют координаты никакой точки.

1. Важнейшие кривые 2-го порядка. Окружностью называется множество всех точек плоскости, находящихся на одинаковом расстоянии, называемом *радиусом*, от фиксированной точки, называемой *центром* окружности.

Выведем уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(x_0, y_0)$ (рис. 1). Для любой точки $M(x, y)$ окружности имеем $CM = R$ или $CM^2 = R^2$. Отсюда и получаем уравнение окружности: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Если центр окружности расположен в начале координат, т.е. $x_0 = 0, y_0 = 0$, то уравнение окружности имеет простейший вид и называется *каноническим*: $x^2 + y^2 = R^2$.

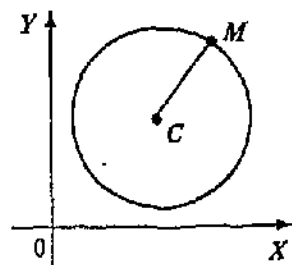


Рис. 1

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

Пусть эта величина есть $2a$, а фокусы есть точки $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Для любой точки $M(x, y)$ эллипса расстояния до фокусов есть

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ и } r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

По определению эллипса $r_1 + r_2 = 2a$; откуда вытекают следующие соотношения: $r_1 = 2a - r_2$; $r_1^2 = 4a^2 - 4ar_2 + r_2^2$; $4ar_2 = 4a^2 + r_2^2 - r_1^2$; $4ar_2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - (x+c)^2 - y^2$; $ar_2 = a^2 - xc$; $a^2r_2^2 = (a^2 - xc)^2$; $a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$; отсюда $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Если $a = c$, то последнее уравнение даст $y = 0$ — уравнение отрезка $[F_1, F_2]$. Если же $a > c$, то, обозначив $a^2 - c^2 = b^2$ ($a < c < b$) и разделив на a^2b^2 , получим каноническое уравнение эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, при этом $a^2 - c^2 = b^2$.

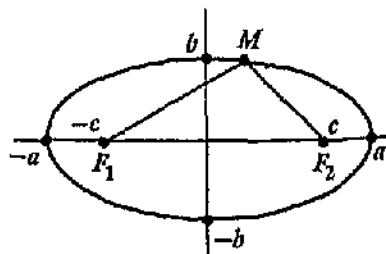


Рис. 2

Согласно этому уравнению, эллипс симметричен относительно осей координат. Положительные числа a , b называются *большой* и *малой полуосями* эллипса, а число $\varepsilon = c/a$ называется *эксцентриситетом* эллипса. При $\varepsilon = 0$ имеем: $a = b$, $c = 0$ и эллипс превращается в окружность радиуса a . При $\varepsilon = 1$ имеем: $a = c$, $b = 0$ и эллипс вырождается в отрезок $[F_1, F_2]$.

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки F , называемой *фокусом*, и от данной прямой m , называемой *директрисой* (рис. 3).

Пусть $F(p/2, 0)$ — фокус параболы, а прямая m вертикальна и проходит через точку $(-p/2, 0)$, симметричную фокусу относительно вертикальной оси координат. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка параболы, тогда $MN = x + p/2$ — расстояние этой точки от директрисы и $r = FM =$

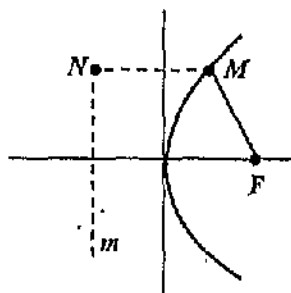


Рис. 3

$= \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$ — расстояние до фокуса. По определению параболы, эти расстояния равны: $\sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = x + p/2$. Отсюда получаем уравнение параболы: $y^2 = 2px$.

Однако чаще приходится иметь дело с обычным уравнением параболы, известным из школы: $y = ax^2 + bx + c$, где a , b , c — параметры параболы. Графики парабол при различных значениях этих параметров изображены на рис. 4.

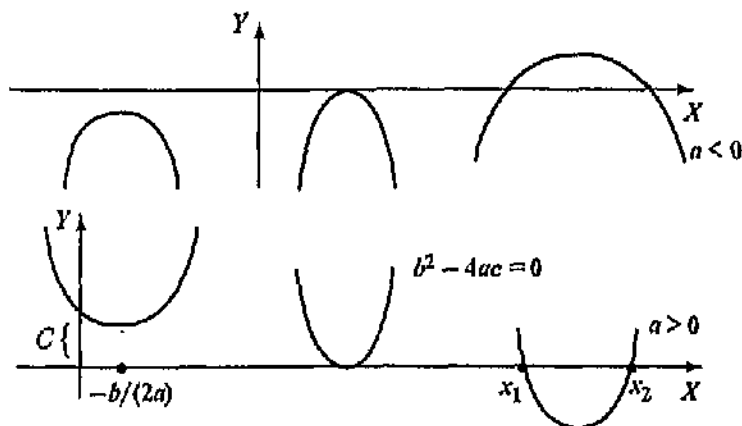


Рис. 4

Обычно для построения графика параболы используют несколько ключевых моментов: корни, ось симметрии, вершина параболы,

куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы, и т.п. Мы будем предполагать эти ключевые моменты известными (см. также задачу 1).

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, разность расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 , называемых *фокусами*, есть величина постоянная (рис. 5).

Пусть эта величина равна $2a$.

Если $F(-c, 0)$, $F(c, 0)$ — фокусы гиперболы и $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы, то расстояния от этой точки до фокусов равны $r_1 =$

$$= F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad r_2 = F_2M =$$

$$= \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad \text{По определению гиперболы } |r_1 - r_2| = 2a \text{ или } r_1 - r_2 = \pm 2a.$$

Преобразуя это выражение так же, как и в случае эллипса, получаем каноническое уравнение гиперболы: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, при этом $c^2 - a^2 = b^2$. Согласно этому уравнению, гипербола симметрична относительно осей координат.

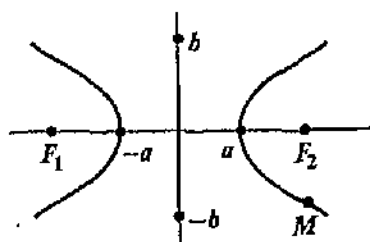


Рис. 5

Приведем пример применения кривых 2-го порядка в экономике.

В условиях частичной монополии фирма может назначать цену на свой товар, но она должна при этом учитывать изменение спроса на него. Решим следующую задачу.

Пример 5. Объем сбыта u зависит от назначаемой цены w по формуле $u = 40 - 2w$. Зависимость издержек I от объема y выпуска дается формулой $I(y) = y^3 + 2y + 7$. По критерию максимальной прибыли найти оптимальный объем производства, значения прибыли и издержек.

Решение. Из условий задачи прибыль $P(y) = uw - I(y) = y(40 - y)/2 - (y^3 + 2y + 7)$ есть квадратичная функция от объема производства (сбыта). Находим производную от прибыли, приравниваем ее к нулю и находим оптимизирующий объем производства $y^* = 6$. Далее находим саму максимальную прибыль $P^* = 47$ и соответствующие издержки $I^* = 55$.

2. Оптические и геометрические свойства кривых 2-го порядка.

Сформулируем сначала оптические свойства:

- 1) прямая, касающаяся эллипса в некоторой точке M , составляет равные углы с фокальными радиусами F_1M , F_2M (рис. 6, а);
- 2) прямая, касающаяся параболы в некоторой точке M , составляет равные углы с фокальным радиусом FM и с лучом, который, исходя из точки M , идет параллельно оси параболы (рис. 6, б);
- 3) прямая, касающаяся гиперболы в некоторой точке M , составляет равные углы с фокальными радиусами F_1M , F_2M (рис. 6, в).

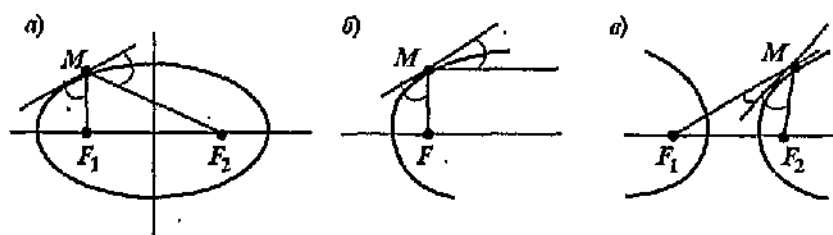


Рис. 6

Эллипсоид, параболоид, гиперболоид. Теперь представим себе, что эллипс, парабола или гипербола вращаются вокруг оси, проходящей через фокусы. Тем самым образуется поверхность, называемая соответственно *эллипсоидом*, *параболоидом* или *гиперболоидом*. Реальная поверхность такого вида, покрытая амальгамой, представляет собой зеркало, соответственно называемое так же. Принимая известные в физике законы отражения света, заключаем, что:

- 1) если источник света находится в одном из фокусов эллиптического зеркала, то лучи источника, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе;
- 2) если источник света находится в одном из фокусов параболического зеркала, то лучи источника, отразившись от зеркала, идут параллельно оси;
- 3) если источник света находится в одном из фокусов гиперболического зеркала, то лучи источника, отразившись от зеркала, идут далее, как если бы они были испущены из другого фокуса.

На указанном свойстве параболического зеркала основано устройство прожектора.

Следующая теорема с новой точки зрения освещает геометрическую природу эллипсов, парабол и гипербол — почему они называются *коническими сечениями*.

Теорема. *Сечением любого круглого конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, может быть лишь эллипс (в частности, окружность), парабола или гипербола.*

3. Полярная система координат. Опишем так называемую *полярную систему координат*; она весьма удобна и применяется довольно часто.

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O , называемой *поллюсом*, исходящего из точки луча OA , называемого *полярной осью*, и масштаба для измерения длин. Кроме того,

при задании полярной системы должно быть сказано, какие повороты вокруг точки O считаются положительными. Обычно считают положительными повороты против часовой стрелки.

Пусть заданы полюс O и полярная ось OA (рис. 7). Рассмотрим произвольную точку M и обозначим через ρ расстояние ее от точки O , т.е. $\rho = OM$, через φ — угол (в радианах), на который нужно повернуть луч OA для совмещения его с лучом OM , т.е. $\angle AOM$.

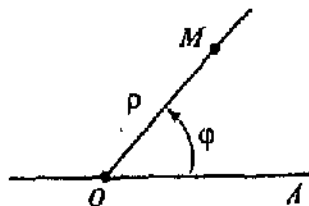


Рис. 7

Полярными координатами точки M (относительно заданной системы) называются числа ρ и φ . При этом число ρ называется первой координатой, или *полярным радиусом*, число φ — второй координатой, или *полярным углом*.

Отметим, что если точка M совпадает с O , то первая координата $\rho = 0$. Вторая же при этом не имеет определенного значения.

Иногда приходится пользоваться одновременно и декартовой, и полярной системами. В таких случаях возникает задача перехода от одной системы к другой: зная полярные координаты точки, вычислить ее декартовы координаты, и обратно — зная декартовы координаты, найти ее полярные координаты. Эти формулы найти несложно, именно, если (x, y) — декартовы координаты, а (ρ, φ) — полярные, то формулы (1)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (1)$$

задают переход от полярных координат к декартовым, а формулы (2)

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi = y/x \end{cases} \quad (2)$$

задают переход от декартовых координат к полярным.

Пример 6. Даны декартовы координаты точки $(-2, 2)$. Найти ее полярные координаты. По формулам (2) получим: $\rho = 2\sqrt{2}$, $\varphi = 3\pi/4$.

Пример 7. Прямая линия задана в декартовых координатах формулой $y = \sqrt{3}x$. Легко видеть, что ее уравнение в полярных координатах есть $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$.

Пример 8. Уравнение окружности радиуса R с центром в полюсе полярной системы координат — $\rho = R$.

Уравнения эллипса, параболы и гиперболы в полярной системе координат можно посмотреть в учебнике.

4. **Параметрические уравнения линии.** Пусть задана система координат OXY и пусть заданы две функции от одного аргумента:

$$x = u(t), y = v(t). \quad (3)$$

Условимся величины x и y при каждом значении t рассматривать как координаты некоторой точки M_t . При изменении t величины x и y , вообще говоря, меняются, следовательно, точка M_t перемещается по плоскости. Равенства (3) называются *параметрическими уравнениями* траектории точки M_t , аргумент t называется *переменным параметром*. Если точка M движется по некоторой линии, то формулы (3) параметрически задают эту линию.

Пример 9. Параметрическое задание прямой и кривых 2-го порядка: а) формулы $x = 4t$, $y = -3t + 3$ параметрически задают прямую линию $3x + 4y = 12$; б) формулы $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ — окружность радиуса R с центром в начале координат; в) формулы $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ — эллипс с осями a и b ; г) формулы $y = t$, $x = t^2/2p$ — параболу $y^2 = 2px$.

ЗАДАЧИ

1. Построить график параболы $y = ax^2 + bx + c$.

Решение. График строят по характерным точкам. К ним относятся:

- корни параболы — находятся из уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (корней может и не быть);
- вершина параболы — ее абсцисса находится из уравнения $2ax + b = 0$;
- точка пересечения с осью ординат — координаты этой точки $(0, c)$;
- ось симметрии — вертикальная прямая с абсциссой $x = -b/(2a)$;
- если $a > 0$ — ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$ — вниз, если $a = 0$, то парабола в действительности есть прямая линия (см. типичные графики параболы на рис. 3).

2. Построить график гиперболы $xy = d$. При $d > 0$ одна ветвь гиперболы находится в 1-м квадранте; вторая — в 3-м (рис. 8, а); при $d < 0$ — во 2-м и 4-м (рис. 8, б). Часто достаточно найти еще две точки с равными по абсолютной величине координатами: при $d > 0$ одну — в 1-м квадранте и другую (симметричную) в 3-м; при $d < 0$ одну — во 2-м квадранте и другую (симметричную) в 4-м.

3. Рассмотрим группу людей, которые ежедневно покупают данного товара на одну и ту же сумму (например, курильщики покупают сигареты), если цена изменяется незначительно (жена выделяет эту сумму). Однако если цена изменится сильно, то происходит переход

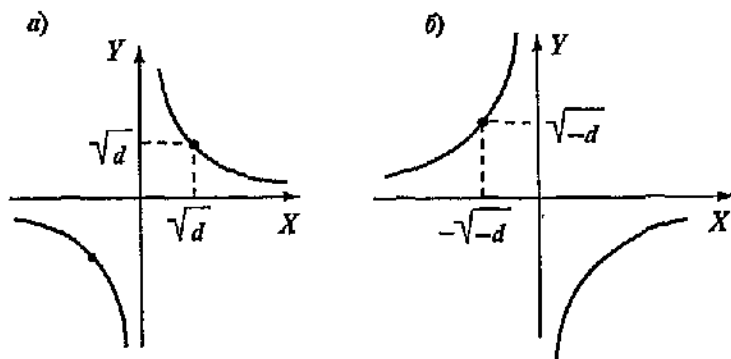


Рис. 8

на новую сумму. Найдите зависимость от цены спроса со стороны этих людей на данный товар. Начертите графики спроса при разных денежных суммах, которые ежедневно расходуются на покупку данного товара.

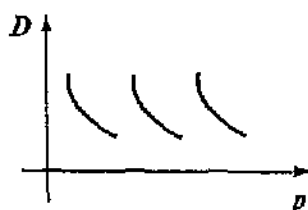


Рис. 9

Решение. В пределах некоторого интервала изменения цены p спрос D будет выражаться формулой: $D(p) = Q/p$, где Q — денежная сумма. Примерные графики приведены на рис. 9.

4. Задайте в полярной системе координат вертикальные и горизонтальные прямые линии.

5. Постройте графики функций в полярной системе координат: а) $r = \varphi$ (спираль Архимеда); б) $r = \pi/\varphi$ (гиперболическая спираль); в) $r = 10 \sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза).

6. Задайте параметрически линии $x^2 + y = 1$, $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 - y^2 = 9$.

Тема 3. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

3.1. ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

1. Задача оптимального планирования. В теме 2 были уже описаны основные составляющие этой модели. Кратко повторим их.

Пусть предприятие из m видов ресурсов производит n видов продукции. Предположим, что для производства одной единицы j -го вида продукции расходуется a_{ij} единиц i -го вида ресурса, т.е. a_{ij} — норма расхода i -го ресурса на производство j -й продукции. Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из норм расхода, так и называется *матрицей норм расхода* или *технологической*.

Напомним, что j -й столбец A , этой матрицы полностью описывает расход ресурсов на производство одной единицы j -й продукции, а i -я строка описывает расход i -го ресурса на производство единицы каждой продукции или при единичной интенсивности каждой технологии.

Пусть c_j есть величина удельной прибыли от реализации одной единицы j -й продукции. Эти удельные прибыли образуют вектор-строку $C = (c_1, \dots, c_n)$. Тогда произведение $C \cdot X = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ представляет собой величину прибыли, полученной при реализации $X = (x_1, \dots, x_n)$ единиц произведенной продукции (X — вектор-столбец, но по типографским соображениям иногда будем его записывать в виде вектора-строки). Обозначим эту прибыль $P(X)$.

Пусть b_i обозначает количество единиц i -го ресурса, запасенного на складе. Запишем эти величины запасов в виде $B = (b_1, \dots, b_m)$ (B — также вектор-столбец). Тогда матрично-векторное неравенство $AX \leq B$ означает необходимость учитывать ограниченность запасов ресурсов при рассмотрении планов производства. Если это неравенство выполняется, значит, для плана X хватит имеющихся запасов ресурсов B и такой план является *реальным* или, как говорят, *допустимым*.

Рассмотрим следующую задачу оптимального планирования: *найти такой план производства $X = (x_1, \dots, x_n)$, который бы был допустимым и обеспечивал наибольшую прибыль из всех допустимых планов*. Эту задачу записывают так:

$$\begin{aligned} c_1 x_1 + \dots + c_n x_n &\rightarrow \max, \\ a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n &\leq b_1, \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n &\leq b_m, \\ x_1, \dots, x_n &\geq 0, \end{aligned}$$

или в матрично-векторной форме:

$$\begin{aligned} P(X) &= C \cdot X \rightarrow \max, \\ AX &\leq B, \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

(Ограничение $X \geq 0$ учитывает содержательный смысл задачи, 0 — это нулевой вектор-столбец такой же размерности, что и X .)

Обозначим множество всех планов, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \\ x_1, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

или в матрично-векторной форме:

$$\begin{aligned} AX &\leq B, \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

через $\mathcal{D}$ и назовем это множество *допустимым* (множеством допустимых планов), тогда указанную выше задачу линейного программирования (ЛП) можно сформулировать так: *найти максимум функции $P(X) = C \cdot X$ на множестве $\mathcal{D}$ допустимых планов*. В матрично-векторной форме:

$$\begin{aligned} P(X) &\rightarrow \max, \\ X &\in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

2. Некоторые общие сведения о линейном программировании. Задача оптимального планирования является самой важной из задач так называемого линейного программирования (ЛП).

Если сформулировать задачу ЛП без экономической интерпретации, то она такова: *найти экстремум линейной функции при линейных же ограничениях на переменные*.

При этом множество значений переменных, удовлетворяющих всем (линейным) ограничениям задачи, называется *допустимым множеством*. Допустимое множество представляет собой некоторое многогранное тело в линейном числовом пространстве размерности, равной числу переменных задачи. Линейная же функция, экстремум которой ищется, называется *целевой функцией*.

Так, сформулированная чисто математическая задача называется *общей задачей линейного программирования*.

Сама точка экстремума, если она существует, называется *оптимальным решением* задачи ЛП, в отличие от любой точки допустимого множества, которая называется просто *решением* (или допустимым решением) задачи ЛП.

Линейное программирование возникло в СССР. В конце 30-х годов XX в. советский экономист-математик Леонид Витальевич Канторович открыл класс этих задач и придумал некоторые частные

методы их решения. В 1975 г. фактически за это открытие он был удостоен Нобелевской премии по экономике, что уже свидетельствует о большой важности задач ЛП.

С чисто математической точки зрения задачи ЛП интересны тем, что методы нахождения экстремумов с помощью производной здесь неприменимы. Действительно, рассмотрим простую задачу ЛП:

$$\begin{aligned} x - 1 &\rightarrow \max, \\ 0 &\leq x \leq 3. \end{aligned}$$

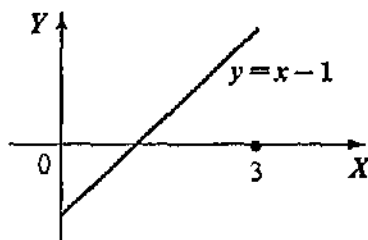


Рис. 1

Поскольку производная целевой функции равна 1, то критических точек в исследуемом промежутке нет и найти экстремум по классической схеме нельзя (рис. 1). И в самом деле, максимум целевой функции в точке $x = 3$, которая не является внутренней точкой области определения (методы нахождения экстремумов с помощью производной рассматривались еще в школьной программе, см. также раздел 6.1).

На практике иногда приходится решать такие задачи ЛП, в которых много видов ресурсов (иногда сотни и тысячи) и много видов продукции (тоже такого порядка). Для решения задач ЛП разработаны мощные математические методы и такие задачи сегодня решают только на компьютере. Самый известный алгоритм решения задач ЛП — это так называемый *симплекс-метод*, придуманный американским математиком Дж. Данцигом в 1949 г.

Теоретической основой ЛП и симплекс-метода являются две теоремы.

1-я основная теорема ЛП. *Задача ЛП имеет оптимальное решение тогда и только тогда, когда целевая функция ограничена на допустимом множестве в направлении экстремума.*

Эта теорема не имеет места в более общих ситуациях. Например, функция $y = 1/x$ ограничена снизу 0 на множестве $(0, +\infty)$, но точки минимума на этом множестве у нее нет.

2-я основная теорема ЛП. *Если экстремум целевой функции в задаче ЛП достигается, то он достигается в некоторой угловой точке допустимого множества.*

Точное определение угловой точки не просто, но нам оно не нужно. Нужно только понять, что допустимое множество — то, на котором ищется экстремум, — это многогранное тело, и вершины этого многогранного тела и есть угловые точки. Таких угловых точек — конечное число.

Сам симплекс-метод представляет собой направленный перебор угловых точек допустимого множества в сторону приближения к искомой точке экстремума. При анализе очередной угловой точки симплекс-метод указывает:

- 1) что эта точка — искомая точка экстремума;
- 2) что целевая функция задачи не ограничена в направлении экстремума и, значит, точки экстремума нет, тем самым задача не имеет решения;
- 3) какую угловую точку далее надо исследовать (при этом значение целевой функции в следующей угловой точке будет ближе к экстремуму).

Решение задачи ЛП вручную с помощью симплекс-метода оформляется в виде специальных таблиц, называемых *симплексными таблицами*. Однако решение задачи ЛП уже лишь с десятком ограничений и таким же количеством переменных весьма трудоемко, так что применение компьютера просто необходимо.

3. Решение задач ЛП с двумя переменными графическим методом. Решим следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2) &= 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 6, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

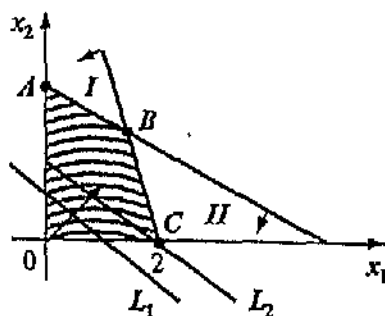


Рис. 2

На плоскости возьмем систему координат (рис. 2). Начало — в точке $O(0, 0)$, ось x_1 направим вправо горизонтально, ось x_2 — вертикально вверх. Приступим к построению допустимого множества D . Неравенству $3x_1 + x_2 \leq 6$ удовлетворяют точки полуплоскости, и граница этой полуплоскости есть прямая линия $3x_1 + x_2 = 6$. Проще всего эту прямую построить по точкам пересечения ее с осями координат (см. п. 1, раздел 2.1). Это точки $(2, 0)$ и

$(0, 6)$. Чтобы узнать нужную полуплоскость, надо подставить в неравенство $3x_1 + x_2 \leq 6$ координаты какой-нибудь точки, не лежащей на прямой, например точки $O(0, 0)$. Неравенство верно, значит, искомой полуплоскостью I является та, в которой находится точка $O(0, 0)$. Это показываем стрелкой.

Аналогично поступаем со вторым ограничением. Получаем еще одну полуплоскость — II. Неотрицательность каждой переменной даст еще две полуплоскости — правую от вертикальной оси и верхнюю от горизонтальной оси. Пересечение всех четырех полуплоскостей дает искомое допустимое множество — четырехугольник $OABC$. Слегка заштрихуем его. Теперь на нем надо найти максимум целевой функции $S(x_1, x_2)$. Можно воспользоваться 2-й основной теоремой ЛП (см. выше). В данной ситуации это означает, что максимум достигается в какой-то из угловых точек O, A, B, C . Координаты точек O, A, C легко находятся: $O(0, 0)$, $A(0, 3)$, $C(2, 0)$. Для нахождения координат точки B надо решить систему двух уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

Решая, находим: $x_1 = 6/5$, $x_2 = 12/5$. Теперь вычислим значения целевой функции в этих точках: $S(O) = 0$, $S(A) = 6$, $S(B) = 36/5$, $S(C) = 4$. Видим, что максимум равен $36/5$ и достигается он в точке $B(6/5, 12/5)$.

Однако обычно экстремум находят не перебором угловых точек.

Рассмотрим линию L_e , заданную уравнением $2x_1 + 2x_2 = e$, т.е. $S(x_1, x_2) = e$. Заметим, что в каждой точке L_e значение функции S одно и то же, а именно e . Поэтому линия L_e так и называется — *линия уровня e функции S* . На рис. 2 показаны две линии уровня: L_1 и L_2 . Заметим, что линии уровня не пересекаются и в данном случае они

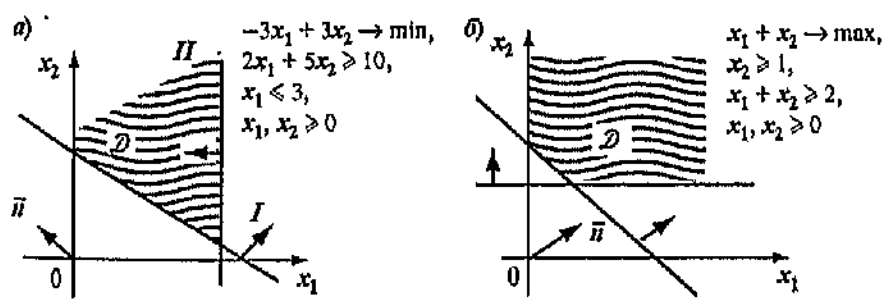


Рис. 3

все — параллельные прямые линии, перпендикулярные своему нормальному вектору $\bar{n} = (2, 2)$ (см. п. 1, раздел 2.1). Этот нормальный вектор показывает направление, в котором значения функции S возрастают. Поэтому в поисках максимума надо двигать линию уровня в направлении нормального вектора. При этом значения исследуе-

мой функции будут возрастать. Последняя точка, по которой линия уровня еще пересекает допустимое множество, и будет точкой максимума. В нашем случае это точка B . Итак, ответ: $x_1 = 6/5$, $x_2 = 12/5$; максимум функции S равен $36/5$.

Если в задаче нужно было найти минимум линейной функции, то линию уровня надо было двигать в сторону, противоположную направлению нормального вектора.

Из общих теорем математического анализа вытекает, что если допустимое множество в задаче ЛП ограниченное, то целевая функция имеет на нем и минимум, и максимум. Если же допустимое множество не ограничено, то экстремума может и не быть, и тогда задача ЛП не имеет решения. На рис. 3 показаны решение задачи на минимум (рис. 3, а) и решение еще одной задачи, когда точки максимума нет из-за неограниченности целевой функции в направлении максимума (рис. 3, б).

4. Задачи целочисленного ЛП. Весьма часто некоторые или все переменные задачи являются *целочисленными*, т.е. их значениями могут быть только целые числа. Например, задача о трансформаторах (см. раздел 1.2) или задачи 3, 4, приведенные ниже. Такие задачи решать много сложнее, чем обычные задачи ЛП, т.е. без требования целочисленности. Для решения таких задач разработаны специальные методы, например так называемый метод «ветвей и границ» (метод ВиГ). Однако, если задача целочисленного ЛП имеет две переменные, то ее можно решить графически. Как и при решении обычной задачи ЛП, надо двигать линию уровня в направлении экстремума и уловить последнюю *целочисленную* точку. Она и даст искомое оптимальное целочисленное решение (см. ниже задачу 2).

ЗАДАЧИ

1. Решите задачу ЛП:

$$1998x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 27,$$

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 1.$$

Решение. Складывая удвоенное 1-е равенство и 2-е равенство, получаем: $2x_1 + 2x_2 = 32$, т.е. $x_1 + x_2 = 16$. Следовательно, $x_3 = 11$. Учитывая, сколь различны коэффициенты при x_1 и x_2 в целевой функции, приходим к выводу, что x_1 должен быть как можно больше, а значит, x_2 — как можно меньше. Получаем окончательно: $x_2 = 1$, $x_1 = 15$; максимальное значение целевой функции равно 30 026.

2. Решите графически задачу целочисленного ЛП:

$$\begin{aligned} 10x_1 + 9x_2 &\rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 24, \\ 7x_1 + 20x_2 &\leq 140, \\ 2x_1 &\leq 11, \\ x_1, x_2 &\text{ — целые числа, } x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Что собой представляет допустимое множество задачи, сколько в нем элементов?

Решение. Сначала найдем допустимое множество без учета целочисленности. Получим пятиугольник $OABCD$ (рис. 4). Подсчитаем, сколько в нем точек, обе координаты которых целочисленны. Таких точек всего 39. Их множество и образует допустимое множество задачи (с учетом целочисленности). Отложим нормальный вектор $(10, 9)$ от точки O . Теперь двигаем прямую, перпендикулярную этому вектору, в том направлении, куда он показывает. Стараемся уловить последнюю целочисленную точку. Это точка $(5, 4)$. Максимальное значение целевой функции с учетом целочисленности равно 95.

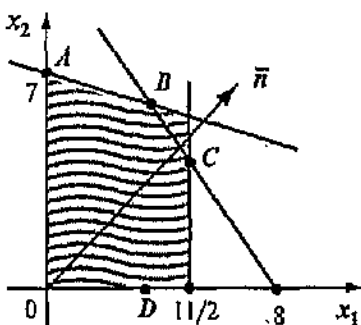


Рис. 4

3. В строительном тресте 2 тяжелых и 10 легких экскаваторов. Необходимость в них есть в трех СУ, выработка в которых (в кубических метрах за сутки) на один тяжелый и один легкий экскаватор соответственно таковы: $(150, 40)$, $(180, 25)$, $(200, 30)$. В одно СУ можно направить не более 5 экскаваторов. Составьте и решите задачу определения числа тяжелых и легких экскаваторов, направляемых в каждое СУ, если требуется максимизировать суммарную суточную выработку всех экскаваторов. Заметьте, что это — задача целочисленного программирования.

4. Составьте задачу ЛП для нахождения минимального количества листов жести 13×6 м, если требуется не менее 40 листов 2×3 и 60 листов 5×5 . Найдите ответ к этой задаче. Это также задача целочисленного программирования.

Указания. Рассмотрите всевозможные способы раскроя больших листов жести на средние и маленькие.

3.2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Теория двойственности является центральной частью всего линейного программирования. Она имеет богатое экономическое содержание.

1. Задача торга. Рассмотрим один цикл работы предприятия с технологической матрицей A , векторами удельных прибылей C и запасов ресурсов B . Соответствующая задача оптимального планирования в развернутой форме:

$$\begin{aligned} c_1 x_1 + \dots + c_n x_n &\rightarrow \max, \\ a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n &\leq b_1, \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n &\leq b_m, \\ x_1, \dots, x_n &\geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Предположим, что к Владельцу предприятия пришел Покупатель и предложил продать ему все или часть ресурсов, запасенных Владельцем. Почему бы и нет? В нормальной экономике не может быть категорических отказов, все дело в цене. Начинается торг вокруг цен на ресурсы или, лучше сказать, оценок ресурсов, потому что торг происходит не на рынке, и мало ли какие соображения могут быть и у Владельца и у Покупателя. Обозначим оценку i -го ресурса через y_i . Покупатель сразу же обозначил свою цель — заплатить поменьше, т.е. $y_1 b_1 + \dots + y_m b_m \rightarrow \min$.

Однако у Владельца свои резоны. Посмотрите, говорит он, за единицу j -й продукции я получу прибыль c_j , истрачу на производство единицы этой продукции ($a_{1j}, \dots, a_{mj}$) единиц различных ресурсов, поэтому разумно так оценить ресурсы, чтобы $y_1 a_{1j} + \dots + y_m a_{mj} \geq c_j$. И это должно быть верно для всех видов продукции.

Сведем вместе аргументы Владельца и Покупателя и получим новую задачу ЛП:

$$\begin{aligned} y_1 b_1 + \dots + y_m b_m &\rightarrow \max, \\ y_1 a_{11} + \dots + y_m a_{m1} &\leq c_1, \\ &\vdots \\ y_1 a_{1n} + \dots + y_m a_{mn} &\leq c_n, \\ y_1, \dots, y_m &\geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Она называется *двойственной* к исходной задаче (1), а вместе эти две задачи и образуют задачу торга. Заместим, что каждому ограничению исходной задачи, т.е. каждому ресурсу, поставлена в соответствие двойственная переменная. Из дальнейшего будет ясно, что обе задачи имеют оптимальные решения. Оптимальное значение

двойственной переменной, соответствующей данному ресурсу, называется *двойственной оценкой ресурса*.

2. Симметричная пара двойственных задач. Запишем задачу (2) в матрично-векторной форме. Для этого оценки ресурсов соберем в вектор-строку $Y = (y_1, \dots, y_m)$. Запишем также рядом и исходную задачу (1). Получим так называемую *симметричную пару двойственных задач*:

$$\begin{aligned} P(X) &= C \cdot X \rightarrow \max, & S(Y) &= Y \cdot B \rightarrow \min, \\ A \cdot X &\leq B, & Y \cdot B &\geq C, \\ X &\geq 0, & Y &\geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Повторим, как по исходной задаче составить двойственную:

- 1) тип экстремума целевой функции меняется;
- 2) каждому ограничению исходной задачи ставится в соответствие переменная двойственной задачи;
- 3) свободные члены исходной задачи становятся коэффициентами при переменных в целевой функции двойственной задачи;
- 4) каждый столбец коэффициентов в системе ограничений формирует ограничение двойственной задачи, при этом тип неравенства меняется; коэффициенты при переменных в целевой функции исходной задачи становятся свободными членами в соответствующих неравенствах двойственной задачи.

Этот алгоритм составления двойственной задачи пригоден и для составления задачи, двойственной к задаче ЛП, записанной в виде (2). Таким образом, чтобы к данной задаче ЛП составить двойственную, эту задачу надо привести к виду (1), если задача была на максимум, или к виду (2), если задача была на минимум, и после этого воспользоваться указанным алгоритмом составления двойственной задачи. Например, напомним задачу, двойственную к задаче ЛП:

$$\begin{aligned} 10x_1 - 3x_2 - 2x_3 &\rightarrow \min, \\ x_1 - x_2 &\geq 3, \\ 1 - x_1 + x_3 &\leq 0, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Так как эта задача — на минимум, преобразуем все неравенства к виду «не менее» ($\geq$). Получим эквивалентную задачу ЛП:

$$\begin{aligned} 10x_1 - 3x_2 - 2x_3 &\rightarrow \min, \\ x_1 - x_2 &\geq 3, \\ x_1 - x_3 &\geq 1, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

После этого составляем двойственную задачу:

$$\begin{aligned} 3y_1 + y_2 &\rightarrow \max, \\ y_1 + y_2 &\leq 10, \\ -y_1 &\leq -3, \\ -y_2 &\leq -2. \end{aligned}$$

3. Теоремы двойственности. Рассмотрим симметричную пару двойственных задач в векторно-матричной форме:

$$\begin{array}{ll} P(X) = C \cdot X \rightarrow \max, & S(Y) = Y \cdot B \rightarrow \min, \\ A \cdot X \leq B, & Y \cdot A \geq C, \\ X \geq 0, & Y \geq 0. \end{array}$$

Обозначим допустимое множество исходной задачи $\mathcal{D}$, двойственной $\mathcal{D}'$.

Основное неравенство теории двойственности. Для любых допустимых решений исходной X и двойственной Y задач

$$P(X) \leq S(Y). \quad (4)$$

Доказательство. Заметьте, что переменные в обеих задачах неотрицательны, поэтому справедлива следующая цепочка неравенств:

$$P(X) = C \cdot X \leq (YA) \cdot X = Y \cdot (AX) \leq Y \cdot B = S(Y).$$

Следствие из основного неравенства. Если допустимое множество одной из задач двойственной пары не пусто, то целевая функция другой задачи ограничена в направлении экстремума на своем допустимом множестве.

Доказательство. Пусть, например, допустимое множество исходной задачи не пусто, т.е. в $\mathcal{D}$ есть некоторая точка X^0 . Тогда, согласно основному неравенству, $S(Y) \geq P(X^0)$ для любой допустимой точки Y двойственной задачи.

Критерий оптимальности допустимых решений. Пусть X^* и Y^* — допустимые решения исходной и двойственной задач. Для того чтобы они были оптимальными, необходимо и достаточно равенства значений целевых функций этих задач.

Доказательство. Предположим, что $P(X^*) = S(Y^*)$. Докажем, что X^* — точка максимума (доказательство, что Y^* — точка минимума, совершенно аналогично). Пусть X — какая-нибудь допустимая точка исходной задачи. Тогда по основному неравенству $P(X) \leq S(Y^*) = P(X^*)$, что и требовалось доказать.

Вторая часть критерия является следствием следующей теоремы:

1-я теорема двойственности. Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное решение и экстремальные значения целевых функций равны.

Доказательство этой теоремы довольно сложно и нам не нужно. Эта теорема вместе с еще двумя теоремами и образует так называемую теорию двойственности ЛП.

2-я теорема двойственности. Для того чтобы допустимые решения X^* исходной и Y^* двойственной задач были оптимальными, необходимо и достаточно выполнения каждой из следующих трех групп соотношений (не забудьте, что: X — вектор-столбец, а Y — вектор-строка):

$$1) Y^*(B - AX^*) = 0 \text{ и } (Y^*A - C)X^* = 0;$$

$$2) \sum_{i=1}^m y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) = 0 \text{ и } \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) x_j^* = 0;$$

$$3) \text{ для всякого } i = 1, \dots, m, \text{ если } y_i^* > 0, \text{ то } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i; \text{ для}$$

$$\text{всякого } j = 1, \dots, n, \text{ если } x_j^* > 0, \text{ то } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j.$$

Докажем необходимость и достаточность выполнения соотношений 1-й группы.

Необходимость. Пусть X^* , Y^* — оптимальные решения. По основному неравенству двойственности имеем: $C \cdot X^* \leq Y^*B$. Но $C \cdot X^* \leq (Y^*A)X^* = Y^*(AX^*) \leq Y^*B$. По 1-й теореме двойственности $C \cdot X^* = Y^*B$. Значит, все неравенства являются в действительности равенствами, т.е. $C \cdot X^* = (Y^*A)X^* = Y^*(AX^*) = Y^* \cdot B$. Следовательно, $Y^*(B - AX^*) = 0$ и $(Y^*A - C)X^* = 0$.

Достаточность. Пусть $Y^*(B - AX^*) = 0$ и $(Y^*A - C)X^* = 0$. Тогда $Y^* \cdot B = Y^*(AX^*)$ и $(Y^*A)X^* = C \cdot X^*$, тем самым $Y^* \cdot B = C \cdot X^*$ и по критерию оптимальности заключаем, что X^* и Y^* — оптимальные решения.

В остальном ограничимся доказательствами эквивалентности 2-й и 3-й групп соотношений.

Пусть выполнены соотношения 2-й группы. Рассмотрим только соотношения левой группы. Каждое слагаемое в сумме

$$\sum_{i=1}^m y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) = 0 \text{ неотрицательно, значит, из равенства нулю}$$

всей суммы вытекает равенство нулю каждого слагаемого. Но это в

точности означает выполнение левых соотношений «для всякого $i = \dots$ » 3-й группы. Так же доказывается, что выполнение этих соотношений 3-й группы влечет равенство нулю левой суммы из 2-й группы.

3-я теорема двойственности. Рассмотрим задачу оптимального планирования

$$\begin{aligned} P(X) &= C \cdot X \rightarrow \max, \\ AX &\leq B, X \geq 0 \end{aligned}$$

при данном векторе запасов ресурсов. Назовем эту задачу *B-задачей*. Предположим, что при данном конкретном значении B^0 вектора запасов B все компоненты оптимального плана $X^*(B^0) = (x_i^*)$ строго положительны. Обозначим $Y^*(B^0)$ оптимальное решение задачи, двойственной к B^0 -задаче. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что если $|B - B^0| < \varepsilon$, то:

- 1) ассортимент выпускаемой продукции в оптимальном плане B -задачи остался прежним (но, вполне возможно, что количественно изменился);
- 2) кроме того, оптимальное решение задачи, двойственной к B -задаче, осталось неизменным, т.е. $Y^*(B) = Y^*(B^0)$;
- 3) кроме того, максимальная прибыль в B -задаче выражается

формулой $P^*(B) = P^*(B^0) + \sum_{i=1}^n y_i^*(b_i - b_i^0)$, где $P^*(B^0)$ — максимальная прибыль в B^0 -задаче.

Доказательство этой теоремы довольно сложно и нам не нужно.

4. Экономическое содержание теории двойственности. Центральным вопросом, который рассматривается в этой теории, — это вопрос о ценности ресурса. Но ценности его не рыночной, а исключительно с внутренней точки зрения данного предприятия, с точки зрения эффективного использования этого ресурса в сложившейся структуре производства, определяемой технологической матрицей и удельными прибылями. При этом оценка ценности производится только в процессе использования ресурса в одном цикле производства. Это является элементом условности, абстрактности, не совсем отражающим реальность.

Из всего этого вытекает следующая основополагающая оценка ценности ресурса — сколько прибыли может принести вовлечение в производство еще одной единицы данного ресурса? Конкретно это означает следующее. Рассмотрим задачу оптимального планирова-

ний с данным вектором запасов ресурсов B . Найдем максимальную прибыль. Найдем оптимальное решение двойственной задачи Y^* . Как уже указывалась ранее, оптимальные значения переменных двойственной задачи называются *двойственными оценками ресурсов*. Именно двойственные оценки ресурсов и есть мера их ценности с рассматриваемой точки зрения.

Как раз это и утверждает 3-я теорема двойственности. Действительно, в условиях теоремы добавочное вовлечение в производство одной единицы i -го ресурса увеличивает максимальную прибыль как раз на величину двойственной его оценки.

3-я теорема двойственности утверждает и еще одну важную вещь. Всякое изменение ассортимента выпускаемой продукции болезненно для производства — надо искать покупателей новых видов продукции и как-то объясниться с покупателями тех видов продукции, которые не будут выпускаться; необходимо перестроить производство — часть станков законсервировать, а другую часть наладить, переучить рабочих и т.д. Однако 3-я теорема двойственности утверждает, что в определенных условиях, при изменении величины запасов, ассортимент выпускаемой продукции не изменится, произойдут лишь некоторые количественные изменения.

Теперь обратимся к экономическому смыслу 2-й теоремы двойственности. Опять рассмотрим исходную задачу оптимального планирования, ее оптимальный план $X^* = (x_j^*)$ и двойственную задачу с ее оптимальным планом $Y^* = (y_i^*)$. Взглянем теперь на 3-ю группу

соотношений. Назовем j -ю технологию *невыгодной*, если $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* > c_j$.

Смысл названия понятен — эта технология не извлекает из ресурсов то, что «в них содержится»: с одной единицы продукции, сделанной по данной технологии, получается прибыль c_j , а потраченные при этом

ресурсы оцениваются в $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^*$, т.е. больше. Так вот, соотношения

«для всякого $j = \dots$ 3-й группы однозначно утверждают, что в оптимальном плане ни одна невыгодная технология не используется!

А о чем говорят соотношения «для всякого $i = \dots$ 3-й группы? Их смысл тоже очень ясен. Если в оптимальном плане данный ресурс используется не полностью, если он остался в ненулевом количестве, то его двойственная оценка равна нулю. Не он содержит еще большей прибыли — ведь его запас не исчерпан. Ресурс с положительной двойственной оценкой называют еще *узким местом производства*. Соотношения «для всякого $i = \dots$ 3-й группы

утверждают, что ресурс, являющийся узким местом производства, обязательно полностью используется в оптимальном плане.

Прокомментируем еще с экономической точки зрения основное неравенство теории двойственности (4): $\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m y_i b_i$ для любых допустимых решений пары двойственных задач. Это неравенство можно трактовать так: если мы согласны с аргументами Владельца, что потраченные на производство одной единицы продукции ресурсы должны оцениваться не меньше, чем полученная от реализации этой единицы продукции прибыль, то никакой допустимый план производства не может извлечь из запасенных ресурсов больше, чем их суммарная оценка, т.е. больше, чем «в них содержится».

Ну, а 1-я теорема двойственности утверждает, что только оптимальный план извлекает из ресурсов в точности столько, сколько в них содержится.

ЗАДАЧИ

1. Решение задач ЛП с помощью 2-й теоремы двойственности. Пусть дана задача ЛП:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &\rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 &\leq 1, \\ 2 + x_1 + x_2 &\geq 0, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

В ней три переменных, так что решить ее графическим методом нельзя. Тем не менее можно решить эту задачу с помощью 2-й теоремы двойственности.

Составим для этой задачи двойственную. Для этой цели сначала сделаем все неравенства типа «не более» ($\leq$):

$$\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &\rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 &\leq 1, & | y_1 \geq 0, \\ -x_1 - x_2 &\leq -2, & | y_2 \geq 0, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Теперь напишем двойственную задачу:

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\rightarrow \min, \\ y_1 - y_2 &\geq 0, \\ y_1 &\geq 4, \\ -y_2 &\geq -8, \\ y_1, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Она с двумя переменными. Решим ее графически.

Ответ: $y_1 = 4$, $y_2 = 0$.

А теперь найдем решение исходной задачи с помощью 2-й теоремы двойственности. Соотношения 3-й группы трактуются следующим образом: если оптимальное значение переменной задачи строго больше нуля, то соответствующее ограничение двойственной задачи должно быть равенством на компонентах ее оптимального решения. И обратное: если ограничение задачи является строгим неравенством на компонентах оптимального решения, то оптимальное значение двойственной переменной должно быть равно нулю.

Так как 1-е и 3-е ограничения двойственной задачи есть строгие неравенства, то $x_1 = 0$, $x_3 = 0$. Далее, $y_1 > 0$, значит, $x_1 + x_2 = 1$, так что $x_2 = 1$.

2. Составьте двойственную задачу для задачи ЛП:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 30x_3 &\rightarrow \min, \\ x_1 - 6x_3 &\geq 1, \\ 2 - x_2 + 5x_3 &\leq 0, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Проверьте, что точки (1, 2, 0) и (4, 3) являются оптимальными для исходной и двойственной задач соответственно.

3. Для данной задачи ЛП составьте двойственную, решите ее и затем найдите решение исходной задачи при помощи 2-й теоремы двойственности:

$$\begin{aligned} 12x_1 &\rightarrow \max, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 4, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

4. Банк имеет на 3 мес. свободные ресурсы в количестве 1 млрд руб. Вложение в ГКО даст 29%, на межбанковском рынке можно получить 17%, вложение в валюту с последующей конвертацией даст только 14%. Составьте задачу распределения свободных средств с целью максимизации процентного дохода. Составьте двойственную задачу. Какова двойственная оценка ресурса — денег?

5. В задачах о трансформаторах и лесопилке (см. раздел 1.2) ответьте на следующие вопросы: Какой ресурс является «узким местом»? Каковы двойственные оценки ресурсов?

3.3. МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА И НЕЙМАНА

1. Модель Леонтьева. Первой рассмотрим модель межотраслевого баланса, или модель Леонтьева, американского экономиста (1906—1999).

Пусть весь производственный сектор народного хозяйства разбит на n чистых отраслей. *Чистая отрасль* — это условное понятие — некоторая часть народного хозяйства, более или менее цельная (например, энергетика, машиностроение, сельское хозяйство и т.п.).

Пусть $\tilde{a}_{ij}$ — количество продукции i -й отрасли, расходуемое в j -й отрасли, V_i — объем производства i -й отрасли, c_i — объем потребления продукции i -й отрасли в непроизводственной сфере. Ясно, что

$$c_i = V_i - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}.$$

Матрица $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ содержит весьма много информации. Так, ее i -я строка характеризует использование продукции i -й отрасли по всему народному хозяйству, а j -й столбец характеризует j -ю отрасль: что и в каких количествах она использует.

Перейдем теперь к безразмерным величинам. Пусть $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}/V_j$ — это количество единиц продукции i -й отрасли, расходуемое на изготовление, производство одной единицы продукции j -й отрасли. Числа a_{ij} называются *коэффициентами прямых затрат* j -й отрасли и характеризуют технологию этой отрасли. Число же c_i/V_i есть доля продукции i -й отрасли, идущая на непроизводственное потребление.

Для дальнейшего рассмотрения модели Леонтьева сделаем два важных предположения.

Первое состоит в том, что сложившуюся технологию производства считаем неизменной. Таким образом, матрица $A = (a_{ij})$ постоянна.

Второе состоит в постулировании свойства линейности существующих технологий, т.е. для выпуска j -й отрасли продукции объема x надо ресурсов (продукции других отраслей) в количестве xa_{ij} . Это требование означает, в частности, что каждая отрасль способна произвести любой объем своей продукции при условии, что ей будут обеспечены ресурсы в необходимом количестве. На самом деле это, конечно, не так, ибо производственные возможности всякой отрасли ограничены имеющимся объемом трудовых ресурсов и основных фондов.

Есть много общего в рассматриваемой ситуации с задачей оптимального планирования или оптимального использования ресурсов.

В частности, пусть $X = (x_j)$ — вектор объемов производства n отраслей, тогда $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ — потребляемые объемы продукции этих отраслей, так что остается вне производства только $C = X - AX$. Важнейшим вопросом в рассматриваемой модели является *продуктивность* модели Леонтьева.

Пусть потребность непроизводственной сферы выражается вектором C . Существует ли вектор производства, обеспечивающий это, т.е. удовлетворяющий уравнению

$$C = AX - X? \quad C = X - AX \quad (1)$$

Разумеется, с учетом экономической интерпретации, этот вектор производства должен быть неотрицательным.

Поэтому говорят, что модель Леонтьева продуктивна, если уравнение $AX - X = C$ имеет неотрицательное решение для любого $C \geq 0$, т.е. матрица A позволяет произвести любой неотрицательный вектор потребления.

Теорема. *Модель Леонтьева с матрицей A продуктивна тогда и только тогда, если существует неотрицательная матрица, обратная к матрице $(E - A)$.*

Можно доказать также, что модель Леонтьева продуктивна, если она позволяет произвести хоть какой-нибудь строго положительный вектор потребления; из этого вытекает, что можно произвести и любой неотрицательный вектор потребления.

Только что указанные критерии продуктивности модели Леонтьева не имеют хорошей экономической интерпретации. Рассмотрим еще один критерий продуктивности.

Пусть модель Леонтьева задана матрицей A размерами $m \times n$; обозначим через N множество $\{1, \dots, n\}$. Пусть $S \subset N$. Говорят, что подмножество S изолированно, если $a_{ij} = 0$ всякий раз, когда $j \in S$, $i \in N \setminus S$. Понятие изолированности подмножества S допускает прозрачную экономическую интерпретацию: отрасли, номера которых принадлежат S , не используют товары, производимые в отраслях с номерами, не принадлежащими S .

Матрица называется *неразложимой*, если в ней нет изолированных подмножеств, кроме N и $\emptyset$. Понятие неразложимости также имеет прозрачный экономический смысл: любая отрасль использует, хотя бы косвенно, продукцию всех отраслей. Ведь если $a_{ij} \neq 0$, то j -я отрасль непосредственно использует продукцию i -й отрасли. Но если даже $a_{ij} = 0$, т.е. j -я отрасль не использует продукцию i -й отрасли непосредственно, все равно при неразложимой матрице от дан-

ной отрасли до любой другой можно найти цепочку отраслей, использующих продукцию друг друга.

Для неразложимых матриц условие продуктивности выглядит так. Если сумма элементов каждой строки не больше единицы и хотя бы для одной строки строго меньше единицы, то модель Леонтьева с этой матрицей продуктивна.

2. Теория трудовой стоимости Маркса в модели Леонтьева. Вопросы использования и распределения трудовых ресурсов являются чрезвычайно важными, поскольку их решение во многом определяет эффективность общественного производства. В модели Леонтьева эти вопросы получают своеобразное освещение.

Сопоставим каждой j -й отрасли число $l_j > 0$, выражающее потребные затраты трудовых ресурсов при единичной интенсивности данного технологического процесса. В зависимости от цели моделирования числа l_j , $j = 1, \dots, n$ могут измеряться либо в человеко-днях (человеко-часах), либо просто числом работающих. Пусть $L = (l_1, \dots, l_n)$ — вектор трудовых ресурсов при единичной интенсивности технологических процессов (отраслей). Ясно, что $L > 0$. После введения вектора L трудовых ресурсов (затрат) модель Леонтьева можно представить парой (A, L) . Если общий объем трудовых ресурсов народного хозяйства равен T , то получим следующую экстремальную задачу.

Пусть вектор C задает не конечный спрос в непродуцируемой сфере, а лишь его пропорции. Поэтому будем считать, что $|C| = 1$. Рассмотрим следующую задачу составления оптимального плана, в которой α — число комплектов продукции, следовательно, весь объем продукции есть αC :

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \max, \\ X - AX &\geq \alpha C, \\ L \cdot X &\leq T, \\ X, \alpha &\geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Если матрица A продуктивна, то задача (2) допустима, т.е. ее допустимое множество не пусто. В самом деле, в силу продуктивности уравнение $X - AX = C$ имеет неотрицательное решение X^0 .

Поскольку $T > 0$, существует $\lambda > 0$ такое, что $L \cdot \lambda X^0 \leq T$. Следовательно, вектор $(\lambda X^0, 1)$ принадлежит допустимому множеству задачи (2). Но ясно, что X ограничено на допустимом множестве (поскольку каждое $l_j > 0$, то каждая компонента X ограничена). Отсюда вытекает и ограниченность α , так что по основным теоремам ЛП (см. раздел 3.2) задача (2) имеет оптимальное решение. При этом максимальное значение α не меньше λ и потому это максимальное значение α положительно.

Построим к задаче (2) двойственную задачу:

$$\begin{array}{lll} \alpha \rightarrow \max, & qT \rightarrow \min, & qT \rightarrow \min, \\ \alpha C - (E - A) \cdot X \leq 0, & \left| \begin{array}{l} P \geq 0, \\ q \geq 0. \end{array} \right. & \begin{array}{l} P \cdot C \geq 1, \\ qL \geq P \cdot (E - A), \end{array} \\ L \cdot X \leq T, & & \text{или} \\ X, \alpha \geq 0, & & P, q \geq 0. \end{array}$$

Здесь P — вектор, а q — число.

Согласно теории двойственности, вектор P и число q можно трактовать как вектор объективно обусловленных цен товаров и цену трудовых ресурсов соответственно.

Из свойств матрицы A вытекает, что $(E - A)^{-1} > 0$.

Оптимальные решения исходной и двойственной задач обозначим X^* , α^* и P^* , q^* .

Можно доказать: так как $C \geq 0$ и $C \neq 0$, то

$$X^* = (E - A)^{-1} C > 0.$$

Уже было выяснено, что $\alpha^* > 0$. Следовательно, по 1-й и 2-й теоремам двойственности (см. раздел 3.2) имеем:

$$\begin{array}{ll} P^* \cdot C = 1, & \alpha^* = q^* T > 0, \\ q^* L = P^* (E - A) & \text{и} \\ L \cdot X^* = T. \end{array}$$

Из $q^* L = P^* (E - A)$ находим $P^* = q^* L (E - A)^{-1}$. Желая найти q^* , подставим P^* в равенство $P^* C = 1$. Получим $q^* L (E - A)^{-1} C = 1$, т.е. $q^* = 1 / (L (E - A)^{-1} C)$. Найдем далее и $P^* = L (E - A)^{-1} / (L (E - A)^{-1} C)$ (сокращать эту дробь нельзя!).

Каков экономический смысл полученных решений?

Так как $P^* \cdot C = 1$, то стоимость (цена) одного комплекта равна единице, значит, α^* — цена α комплектов товаров. С другой стороны, $q^* T$ есть общая заработная плата, выплаченная за T единиц труда по цене q^* за каждую. Таким образом, равенство $\alpha^* = q^* T$ выражает равенство спроса и предложения в стоимостном выражении — цена выпущенного объема конечной продукции равна общей сумме денег, полученной людьми, участвующими в процессе производства, в качестве заработной платы.

Напомним далее, что j -я компонента вектора $L = l_j$ есть трудовые затраты при выпуске одной единицы продукции j -й отрасли. Но чтобы ее выпустить, надо сначала сделать a_{ij} ед. каждой i -й продукции и т.д. В итоге получим, что вектор $L \cdot (E - A)^{-1}$ есть вектор полных трудовых затрат при производстве единицы продукции в каждой отрасли. А теперь вспомним, что $P^* = L (E - A)^{-1} / (L (E - A)^{-1} C)$, т.е. цены пропорциональны полным трудовым затратам.

Этот вывод привлекал и привлекает внимание многих видных экономистов, ибо он перекликается с трудовой теорией стоимости Маркса, которая утверждает, что в основе стоимости товара лежит

количество общественно необходимого труда, потребного для производства товара.

3. Модель Неймана. Рассмотрим более общую модель Неймана. Рассмотрим экономику, описываемую парой (C, K) , где C — пространство товаров, а K — множество производственных процессов, перерабатывающих некоторые количества товаров в другие количества тех же товаров. Под *товаром* (продуктом) понимаем как первичные факторы производства (земля, труд) и сырье (нефть, уголь), так и конечные продукты производства, услуги и т.п.

Пусть товаров всего n , тогда C есть неотрицательный ортант n -мерного пространства. Множество K производственных процессов имеет в своей основе конечное число процессов $(Q_1, \dots, Q_m)$, которые называются *базисными*. Каждый базисный процесс представляет собой пару векторов $Q_j = \langle A_j, B_j \rangle$ из C . (Векторы A_j, B_j — это векторы-столбцы, но векторы-столбцы мы из типографских соображений будем записывать строками.) Содержательный смысл процесса Q_j таков: он затрачивает вектор $A_j = (a_{ij})$ и выпускает вектор $B_j = (b_{ij})$, т.е. перерабатывает вектор A_j в вектор B_j . По смыслу все векторы A_j, B_j неотрицательны. Обозначив $A = (A_1, \dots, A_m), B = (B_1, \dots, B_m)$, получаем, что технология нашей модели задается парой неотрицательных матриц A, B ; матрица A называется *матрицей затрат*, B — *матрицей выпуска*.

Комбинируя базисные процессы, можно получить новые процессы. Так, возьмем неотрицательные числа $z_i, i = 1, \dots, m$ и определим новый производственный процесс $z_1 Q_1 + \dots + z_m Q_m$, в котором

затраты есть вектор $\sum_{k=1}^m z_k A_k$, а выпуск есть вектор $\sum_{k=1}^m z_k B_k$; полученный производственный процесс кратко обозначим (AZ, BZ) . Вектор-столбец $Z = (z_i)$ называется *вектором интенсивностей*. Получившееся более широкое множество процессов и обозначим K .

Можно заметить, что в то время как базисные процессы $Q_1, \dots, Q_m$ соответствуют, вообще говоря, реальным отраслям, заводам, фабрикам, каждый элемент $(X, Y) \in K$ есть некоторый фиктивный процесс, описывающий определенный режим совместной работы этих отраслей, заводов, фабрик. При этом X есть вектор затрат, Y — вектор выпуска.

Рассмотренная ранее модель Леонтьева действительно есть частный случай модели Неймана при $n = m, B = E$. Основное отличие модели Неймана состоит в том, что всякий базисный процесс может выпускать не один продукт. Ясно также, что модель Неймана линейна.

ЗАДАЧИ

1. Решим стандартную задачу на модель Леонтьева. Даны вектор непроизводственного потребления $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и матрица $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ межотраслевого баланса. Найти вектор валового выпуска, обеспечивающий данный вектор потребления.

Решение. Известно, что $X = (E - A)^{-1}C$. Следовательно, надо найти матрицу, обратную к $(E - A)$. Для этого можно воспользоваться любым методом, например с помощью миноров (см. раздел 1.3).

Получаем: $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & 2/5 \\ 6/5 & 8/5 \end{pmatrix}$ и, значит, $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

2. Решим стандартную задачу на модель Неймана. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$ технологических процессов, вектор цен $P = (1, 5)$ и вектор начальных запасов $S = \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \end{pmatrix}$. Найдём интенсивности технологических процессов, максимизирующие стоимость выпуска продукции за один производственный цикл, и эту самую максимальную стоимость.

Решение. Пусть $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ — вектор-столбец искомых интенсивностей, тогда для их нахождения имеем задачу линейного программирования:

$$\begin{array}{ll} PBZ \rightarrow \max, & \text{или (в развернутой} \\ AZ \leq S, & \text{форме)} \end{array} \quad \begin{array}{l} 30z_1 + 80z_2 \rightarrow \max, \\ 5z_1 + 2z_2 \leq 14, \\ 4z_1 + 10z_2 \leq 28, \\ z_1, z_2 \geq 0. \end{array}$$

Решим эту задачу графическим методом (рис. 1). Точка максимума $(0; 2,8)$ и максимальная стоимость продукции, которая может быть выпущена за один цикл, равна 224.

3. Найдите, какие из нижеприведенных матриц неразложимы:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

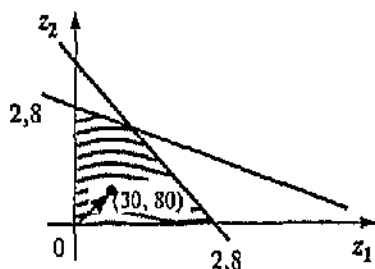


Рис. 1

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Найдите, используя критерий продуктивности для неразложимых матриц (см. п. 1, раздел 3.1), какие из вышеприведенных неразложимых матриц продуктивны. Сформулируйте экономическое содержание данного критерия.

4. Придумайте несколько матриц для продуктивных моделей Леонтьева.

Указание. Воспользуйтесь критерием продуктивности для неразложимых матриц.

5. Пусть модель Леонтьева задается матрицей $\begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Выяснить, продуктивна ли она. Пусть $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ есть валовой выпуск. Каков вектор непрямых потребностей?

6. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ технологических процессов и вектор цен $P = (3, 5)$ в модели Неймана. Найти, сколько потребуется запасов и сколько будет произведено продукции при интенсивности $z_1 = 2$, $z_2 = 3$ технологических процессов.

Тема 4.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ, ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

4.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Элементы теории множеств. В 1872 г. немецкий математик Г. Кантор, создатель теории множеств, определил *множество* как «объединение в одно целое объектов, хорошо различимых нашей интуицией или мыслью». Примеры множеств: множество студентов в данной аудитории, множество всех целых чисел и т.д.

Множество состоит из *элементов*. В подходящем случае элементы множества называют *точками* (например, точки числовой прямой).

мой). Когда a — элемент множества A , то говорят еще, что a принадлежит A и пишут так: $a \in A$. Если же a не является элементом A , то говорят еще, что a не принадлежит A и пишут $a \notin A$. Иногда задать множество можно просто перечислив его элементы, например $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Множества считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Если множество A есть часть множества B , то его называют *подмножеством* B и пишут так: $A \subseteq B$. Символом $\emptyset$ обозначают пустое множество, т.е. не имеющее ни одного элемента.

Стрелка $\rightarrow$ является символом логического следствия, а знак $\leftrightarrow$ обозначает логическую эквивалентность. Например, $A \subseteq B$ и $B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$; $A \subseteq B$ и $B \subseteq A \leftrightarrow A = B$.

Запись $\{x: P(x)\}$ обозначает множество всех таких x , которые обладают свойством $P(x)$.

Объединение множеств A и B есть множество $\{x: x \in A \text{ или } x \in B\}$, оно обозначается $A \cup B$, а *пересечение* $A \cap B$ множеств A и B есть множество $\{x: x \in A \text{ и } x \in B\}$.

В дальнейшем нам придется иметь дело с различными множествами действительных чисел. Перечислим их:

- 1) множество натуральных чисел $N = \{1, 2, \dots\}$;
- 2) множество целых чисел $Z = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$;
- 3) множество рациональных чисел $Q = \{n/m: n, m \in Z, m \neq 0\}$ (все это расширяющиеся подмножества множества R всех действительных чисел);
- 4) отрезок $[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$; интервал $(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}$;
- 5) окрестность точки a есть любой интервал, содержащий a .

Символ ∞ (бесконечность) служит для удобства некоторых обозначений. Например, $[0, \infty)$ обозначает множество всех действительных чисел, больших нуля, и т.п.

Множество называется *счетным*, если его элементы можно пересчитать, т.е. занумеровать натуральными числами; и *нечетным* в противном случае. Из вышеуказанных множеств N , Z , Q счетны, а отрезок $[a, b]$, интервал (a, b) нечетны, если $a \neq b$; все множество действительных чисел тоже нечетно (нечетность указанных множеств надо специально доказывать).

2. Последовательности. Последовательностью $\{x_1, x_2, \dots\}$ называется функция $x_n = f(n)$, заданная на множестве натуральных чисел. В качестве примеров последовательностей могут служить арифметическая прогрессия $a_n = a_1 + d(n-1)$ и геометрическая прогрессия $b_n = b_1 q^{n-1}$. Иногда последовательность будет обозначаться (x_n) .

Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху (снизу)*, если найдется такое число $M(m)$, что $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$) для всех $n \in N$. Ограниченная и сверху и снизу последовательность называется просто *ограниченной*.

Например, последовательность $x_n = 3/n$ ограничена. В самом деле, снизу она ограничена числом 0, а сверху — числом 3; последовательность $x_n = n \sin n$ не ограничена сверху (но доказать это не так просто!).

Последовательность (x_n) называется *возрастающей (неубывающей)*, если $x_n < x_{n+1}$ ($x_n \leq x_{n+1}$); *убывающей (невозрастающей)*, если $x_n > x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$); *монотонной*, если она или неубывающая или невозрастающая.

Хорошим примером последовательностей являются наращенные денежные суммы, положенные в банк.

Когда в банк делают вклад, то банк получает возможность распоряжаться (в определенных пределах) вложенной суммой. За удобства, услуги надо платить. Выплата процентной ставки и есть плата банка за возможность пользоваться деньгами вкладчика в течение года (но, вообще говоря, точные условия выплаты денег вкладчику оговариваются в договоре вклада).

Пример 1. В банк сделан вклад S руб. при процентной ставке $p\%$. Сумма S_t , которая будет получена через время t при условии начисления простых процентов, выражается формулой $S_t = S(1 + pt/100)$. Следовательно, зависимость накопленной суммы от времени выражается линейной функцией. Однако иногда начисление производится только по прошествии целого числа лет. В этом случае накопленная сумма является арифметической прогрессией с начальным (нулевым) членом S и разностью $Sp/100$.

Пример 2. Пусть начисляются сложные проценты. Тогда сумма S_t , которая будет получена через время t , выражается формулой $S_t = S(1 + p/100)^t$. Следовательно, зависимость накопленной суммы от времени выражается показательной функцией. Если начисление производится только по прошествии целого числа лет, то накопленная сумма является геометрической прогрессией с начальным (нулевым) членом S и показателем $(1 + p/100)$.

В обоих случаях S называется *наращенной суммой*.

С другой стороны, пусть имеется вексель на 1000 дол., выданный 2 декабря под 20% годовых с погашением через год. Но векселедержателю к началу сентября очень понадобились деньги и он 31 августа понес вексель в банк. Принятие векселя и выплата денег векселедержателю называется *учетом векселя* в банке. Теоретически банк должен был бы выплатить сумму S из расчета $S(1 + 0,2)^{1/4} = 1000$, т.е. примерно 956. Но банки немного хитрят и удерживают 5% с конечной суммы, т.е. банк выплатит 950.

Вообще задача определения эквивалента в момент t_2 денежной суммы, которая в момент t_1 была равна S_1 , называется *дисконтирова-*

нием, т.е. приведением к другому моменту. Если процентная ставка $p\%$ неизменна и начисляются сложные проценты, то $S_2 = S_1 (1 + p/100)^2 - 1$.

Все эти рассуждения не учитывали инфляцию. Говорят, что инфляция составляет $r\%$ в год, если один и тот же набор товаров через год окажется стоящим на $r\%$ больше. Иначе говоря, реальное содержание денежной суммы уменьшается через год в $(1 + r/100)$ раз, а через n лет в $(1 + r/100)^n$ раз. В нормальной экономике процентная ставка больше, чем темп инфляции.

Пусть норма процента — $p\%$ в год, а инфляция — $r\%$ в год. Тогда через год сумма S возрастет на $p\%$ из-за наращивания по норме процента, но эта же сумма будет обладать в $(1 + r/100)$ раз меньшей покупательной способностью, следовательно, ее реальное денежное содержание будет равно: $S(1 + p/100)/(1 + r/100) = S(100 + p)/(100 + r)$. Отсюда следует простой вывод — реальное содержание денежной суммы:

$$\begin{cases} \text{возрастает, если } p > r, \\ \text{неизменно, если } p = r, \\ \text{уменьшается, если } p < r. \end{cases}$$

Найдем рыночную стоимость бессрочной облигации. Гашение такой облигации не предусмотрено, но каждый год владелец получает так называемый *купонный доход*. Если облигация номинала 1000 дол. имеет 3%-ный купон, значит, каждый год она приносит владельцу 30 дол. Предположим, что темп инфляции 2%. Рыночная цена облигации будет равна дисконтированию ряда будущих ежегодных платежей в 30 дол. по ставке 2%, т.е. сумме геометрической прогрессии с первым членом 30 и знаменателем $1/(1 + 2/100)$ (облигация продается сразу же после получения очередного купонного дохода). Получаем окончательно: 1530. Это и есть *рыночная цена облигации*.

Конечно, эта цена является лишь весьма ориентировочной. В конкретной ситуации покупатели и продавцы принимают во внимание множество факторов, начиная от сугубо индивидуальных и кончая стабильностью государственных институтов.

При установлении рыночной цены акции также принимают во внимание будущие дивиденды (часто — теоретически бесконечный ряд платежей), которые каким-то образом пытаются дисконтировать к данному моменту.

Определение рыночной цены облигации, акции таким образом имеет, в общем, чисто теоретическое значение. На практике поступают по-другому, а именно: пусть ставка процента p , годовой купон облигации q , номинал облигации A , ее рыночная цена I , тогда приравнивают два дохода $qA = pI$ и находят отсюда рыночную цену: $I = qA/p$.

3. Предел последовательности и сумма ряда. Число A называется *пределом последовательности* (x_n) , если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $K \in \mathbb{N}$, что $|x_n - A| < \varepsilon$ для любого $n > K$. Обозначение: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$.

Например, предел последовательности $x_n = 1/n$ есть 0. Действительно, фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $K \in \mathbb{N}$ таково, что $K > 1/\varepsilon$. Как легко видеть, $|1/n - 0| < \varepsilon$ для любого $n > K$.

Сумма геометрической прогрессии есть часто встречающийся пример суммы бесконечного ряда чисел. Пусть (a_n) — какая-нибудь последовательность чисел. Рассмотрим последовательность начальных сумм $S_n = a_1 + \dots + a_n$. Если эта последовательность имеет предел, то этот предел называется *суммой ряда* $a_1 + a_2 + \dots$. Если же предел не существует, то говорят, что *ряд расходится* (если предел $+\infty$ или $-\infty$, то иногда говорят, что ряд расходится к бесконечности).

Например, сумма ряда $0 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ равна единице. Действительно, сумма S_n первых n членов ряда равна $1 - 1/2^n$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, а это и есть, по определению, сумма рассматриваемого ряда.

Во многих важных случаях существование предела последовательности можно установить с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть последовательность (x_n) монотонно не убывает (или не возрастает). Если при этом она ограничена сверху (снизу), то она имеет конечный предел; в противном случае она стремится к $+\infty$ ($-\infty$).

4. Паутинообразная модель рынка. Это простая модель рынка одного товара. Обозначим $D(p)$ функцию спроса со стороны покупателей на товар в зависимости от его цены p , а $S(p)$ — функцию предложения продавцами этого же товара тоже в зависимости от цены.

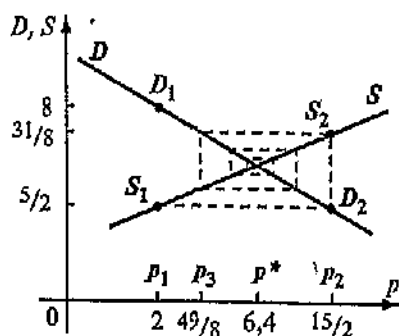


Рис. 1

Поскольку речь идет о рынке одного товара, то в состоянии равновесия $D(p) = S(p)$. В реальности это уравнение имеет единственное решение p^* и тройка (p^*, D^*, S^*) , где $D^* = D(p^*)$, $S^* = S(p^*)$ и есть *состояние равновесия*. Процесс отыскания этого равновесия называют «нащупыванием».

Рассмотрим частный случай этой модели — при линейных функциях спроса и предложения.

Пусть, например, функция спроса $D = 10 - p$ (рис. 1), а функция предложения $S = 2 + p/4$. Функция, обратная к функции спроса, есть $p = 10 - D$. Эта функция дает зависимость цены от спроса. Зависимость цены от предложения — функция, обратная к S , есть $p = 4S - 8$. Равновесная цена $p = 6,4$. Проследим, как проходит «нащупывание» равновесной цены.

Пусть начальная цена $p_1 = 2$. Так как при этой цене спрос больше предложения, т.е. $D_1 = 8 > S_1 = 5/2$, то цена увеличивается до p_2 , так чтобы $S_1 = D_2$. Но теперь продавцы предлагают $S_2 = 31/8$ — больше спроса D_2 . Это вызывает падение цены до $p_3 = 49/8$ и т.д. Расчеты быстро усложняются, но качественно картина ясна — идет «нащупывание» точки равновесия.

5. Прямые и полные затраты в модели Леонтьева. Модель Леонтьева рассмотрена в п. 1 раздела 3.3. Напомним, что модель задается матрицей A *прямых затрат*. В этой матрице a_{ij} — это количество единиц продукции i -й отрасли, расходуемое на изготовление, производство одной единицы продукции j -й отрасли. Числа a_{ij} называются *коэффициентами прямых затрат* j -й отрасли и характеризуют технологию этой отрасли. Пусть $X = (x_j)$ обозначает вектор валового производства, тогда AX есть израсходованные в процессе производства ресурсы и для непроектируемой сферы остается $C = X - AX$. Но на производство C надо израсходовать AC ресурсов. Однако на их производство надо в свою очередь затратить $A(AC) = A^2 \cdot C$ ресурсов, а для их производства еще израсходовать $A(A^2C) = A^3 \cdot C$ и т.д.

Полные затраты, таким образом, есть сумма бесконечного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot C$. Но члены этого ряда — конечномерные векторы-столбцы, поэтому сумма этого ряда находится как вектор сумм 1-х, 2-х и т.д. компонент векторов $A^n \cdot C$. Однако можно доказать, что если сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot C$ существует, то ее можно вычислить как произведение

$$(E - A)^{-1} C. \quad (1)$$

Обратите внимание на аналогию с формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b + bq + bq^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} bq^n = b/(1 - q)$. Но эта формула верна тогда и только тогда, если $|q| < 1$. Нечто подобное имеет место и для формулы (1).

Для матрицы A число λ называется *собственным числом*, если найдется ненулевой вектор Y , такой что $AY = \lambda Y$. Такой вектор также

называется *собственным вектором*, отвечающим данному собственному числу λ (вектор Y не определяется по λ однозначно — всякий вектор, ему пропорциональный, также будет собственным вектором, отвечающим этому же собственному числу λ).

Можно доказать следующее утверждение: модель Леонтьева с матрицей A продуктивна, если и только если матрица имеет собственное число $\lambda_1 < 1$, которое к тому же является наибольшим по модулю из всех собственных чисел матрицы.

Если матрица имеет такое число λ_1 , то можно доказать, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$ и формула (1) верна.

Пример 3. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$ найдем собственные числа и векторы. Согласно определению, собственный вектор Y и собственное число λ удовлетворяют уравнению $AY = \lambda Y$, или $(A - \lambda E)Y = 0$. Имеем однородную СЛАУ:

$$\begin{cases} (1/2 - \lambda)y_1 + (1/3)y_2 = 0, \\ (1/6)y_1 + (1/3 - \lambda)y_2 = 0. \end{cases}$$

Чтобы такая СЛАУ имела ненулевое решение, определитель ее должен быть равен нулю. Получаем уравнение $(1/2 - \lambda)(1/3 - \lambda) - (1/3) \cdot (1/6) = 0$. Решая его, находим два собственных числа $\lambda_1 = 1/6$ и $\lambda_2 = 2/3$. Затем для каждого λ_1, λ_2 находим собственный вектор: $Y_1 = (1, -1)$, $Y_2 = (2, 1)$.

ЗАДАЧИ

1. Пусть вектор цен в пространстве двух товаров меняется по закону последовательности $P_n = (2 - 1/n, 4 - 1/n)$. Найдите закон изменения стоимости набора товаров $X = (5, 10)$. Опишите, как меняется в зависимости от цен бюджетное множество при неизменном доходе 60.

Решение. Стоимость набора меняется по закону последовательности $C_n = P_n \cdot X = (2 - 1/n)5 + (4 - 1/n)10 = 50 - 15/n$. Крайняя правая точка бюджетного множества есть $a_n = 60/(2 - 1/n) = 60n/(2n - 1)$, и эта точка стремится к 30, а крайняя высшая — $b_n = 60/(4 - 1/n)$ и стремится к 15. Отсюда и ясен закон изменения бюджетного множества.

2. Счетны ли: а) множество всех четных целых чисел; б) множество всех чисел вида $m + n\sqrt{3}$, где m, n — целые числа; в) множество всех правильных дробей со знаменателем 3?

3. Убедитесь, что последовательность $x_n = n^2 + 12n + 120$ возрастает; последовательность $y_n = (7 - n)/n$ убывает; последовательность $z_n = n^2 - 30n + 200$ не монотонна.

4. Выясните, какие из нижеследующих последовательностей ограничены, а какие нет: а) $x_n = (n + 60)/n$; б) $y_n = (n^2 - 40)/n$; в) $z_n = 2^n/(4 + n)$; г) $v_n = n \cos n$.

5. Докажите, что сумма, разность и произведение двух и даже любого конечного числа ограниченных последовательностей снова есть ограниченная последовательность.

6. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2^n - 1/3^n)$.

7. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

8. Найдите предел последовательности A^n , где $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Указание. Возведите A во 2-ю, 3-ю степени. Возможно, догадаетесь, чему равен искомый предел.

9. Найдите рыночную цену облигации номиналом 50 дол. с 4%-ным купоном при годовой инфляции 2%.

10. Опишите, как меняется в зависимости от изменения дохода $Q_n = 40 + 1/n$ бюджетное множество при неизменных ценах (2, 5).

11. Рассмотрите паутинообразную модель рынка при функциях спроса $D = 10 - 2p$ и предложения $S = 4 + p$ и начальной цене 1.

12. Рассмотрите упрощенную модель «челнока»: имея начальный капитал Q , он покупает на весь капитал товар одного вида по цене p , а продает его по цене $p' > p$. Как растет его капитал по циклам? Пусть «челнок» работает с товарами двух видов. При каких соотношениях на векторы цен $P = (p_1, p_2)$ и $P' = (p'_1, p'_2)$ воляж его будет выгодным?

13. Убедитесь в том, что заниженный курс рубля выгоден российским импортерам, а завышенный — российским экспортерам. Кому выгоден фиксированный курс рубля при инфляции в России (импортерам или экспортерам)?

Указание. Импортер за доллары покупает товары за границей, продает их в России за рубли, покупает в России за рубли доллары и т.д.

4.2. ФУНКЦИИ

1. Общее понятие функции. Пусть даны два множества X и Y . Пусть каким-то способом f каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один элемент $y = f(x) \in Y$. Тогда соответствие f называется

функцией с областью определения $D(f) = X$ и областью значений $R(f) \subseteq Y$. При этом x называется *независимым переменным* или *аргументом функции*, а $y = f(x)$ — *значением функции* или *зависимым переменным*.

Например, функция $y = \sqrt{x-1}$ задает функцию с областью определения $D(y) = [1, \infty)$ и областью значений $R(y) = [0, \infty)$.

Множество пар $\{(x, f(x)): x \in D(f)\}$ называется *графиком функции* f .

Пусть $y = f(x)$ — функция, $D(f)$ и $R(f)$ — ее области определения и значений соответственно. Для всякого $y \in R(f)$ выберем какой-нибудь $x \in D(f)$, такой, что $f(x) = y$. Функция $g: y \rightarrow x$ называется *обратной* к функции f , а обе функции называются *взаимно обратными*. Так, логарифмическая функция $y = \ln x$ и показательная $x = e^y$ являются взаимно обратными.

Особенно широко распространены числовые функции, у которых и область определения, и область значений являются числовыми множествами. График такой функции есть некоторое множество точек на координатной плоскости.

Функции можно задавать аналитически, при помощи таблиц, при помощи графика, при помощи некоторого алгоритма (например, компьютерной программы).

При *аналитическом* способе задания функции зависимость между переменными определяется формулой. Например, формула $y = x^2$ задает функцию с областью определения $(-\infty, +\infty)$.

При *табличном* способе задания функции выписываются в определенном порядке значения аргумента и соответствующие значения функции. Хорошо известны, например, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и другие.

При *графическом* способе задания функции зависимость между переменными отражается с помощью графика. Например, в музеях можно часто видеть самопишущий прибор, отражающий изменение влажности или температуры во времени.

Сейчас в сбербанке, например, начисление процентов производится на компьютере, при этом алгоритм начисления может быть довольно сложным и его нелегко свести к какой-то формуле.

2. Некоторые функциональные зависимости, используемые в экономике. Первые две функции уже рассматривались (см. п. 4, раздел 4.1). На рис. 1, а, б приведено примерное графическое представление этих функций, а именно: *функция спроса* — зависимость спроса D на некоторый товар от его цены p ; *функция предложения* — зависимость предложения S некоторого товара от его цены p .

Приведены также: *функция полезности* (рис. 1, в) — субъективная числовая оценка данным индивидом полезности и количества x

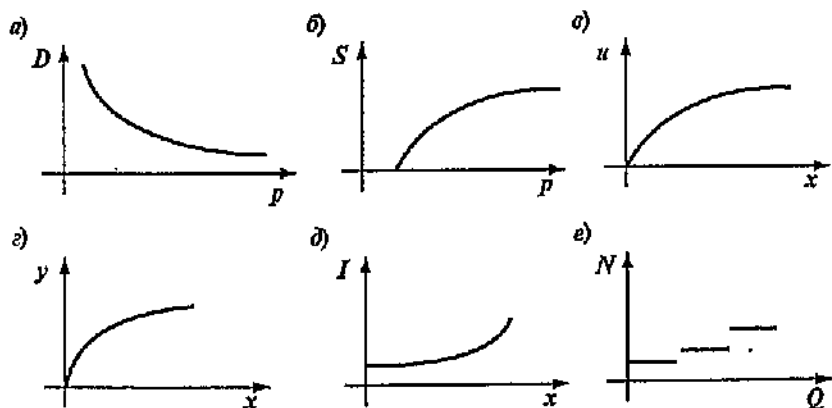


Рис. 1

товара для него; *однофакторная производственная функция* (рис. 1, г) — зависимость объема y выпускаемой продукции от объема x перерабатываемого ресурса; *функция издержек* (рис. 1, д) — зависимость издержек I на производство x ед. продукции; *налоговая ставка* (рис. 1, е) — зависимость налоговой ставки N в процентах от величины годового дохода Q .

Все эти функции, кроме последней, весьма трудно выразить аналитически. При необходимости их находят путем кропотливого анализа. Последняя же функция, напротив, обычно довольно хорошо известна всему обществу и законодательно утверждена.

В настоящее время налоговая ставка устроена следующим образом: если $Q \leq 30$ тыс. руб., то взимается 12%; если $Q \leq 60$ тыс. руб., то с разности $Q - 30$ тыс. руб. взимается дополнительно 15%; с разности $Q - 60$ тыс. руб. взимается уже 20% и т.д.

3. Элементарные функции. Постоянная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции называются *основными элементарными функциями*. Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий, а также конечного числа операций взятия функции от функции, над основными элементарными функциями, составляют класс *элементарных функций*. Все остальные функции называются *неэлементарными*. Среди неэлементарных функций есть и очень простые, например функция «знак (сигнум)»:

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

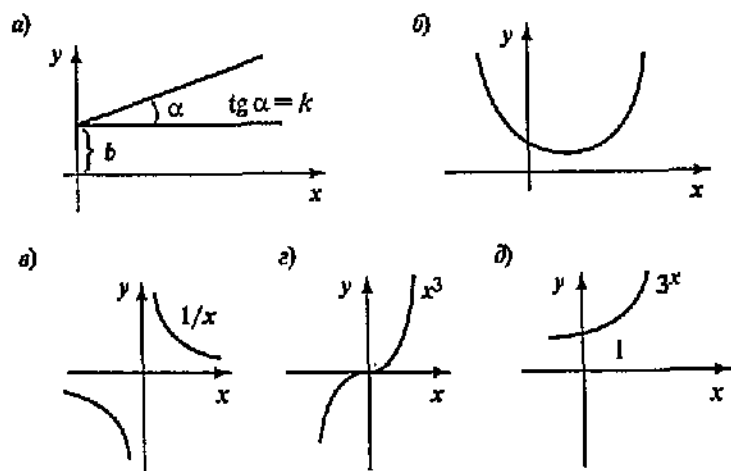


Рис. 2

Напомним основные элементарные функции.

Линейная функция $y = kx + b$ (рис. 2, а), графиком которой является прямая линия с угловым коэффициентом k , пересекающая ось ординат в точке с ординатой b . Частный случай линейной функции — *прямая пропорциональная зависимость* $y = kx$, графиком которой служит прямая, проходящая через начало координат.

На рисунке также приведены графики: *квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 2, б), графиком которой является парабола; *обратной пропорциональной зависимости* $y = a/x$ (рис. 2, в), графиком которой служит гипербола; *степенной функции* $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 2, г); *показательной функции* $y = a^x$, $a > 0$ (рис. 2, д).

На рис. 3 приведены графики *тригонометрических функций*.

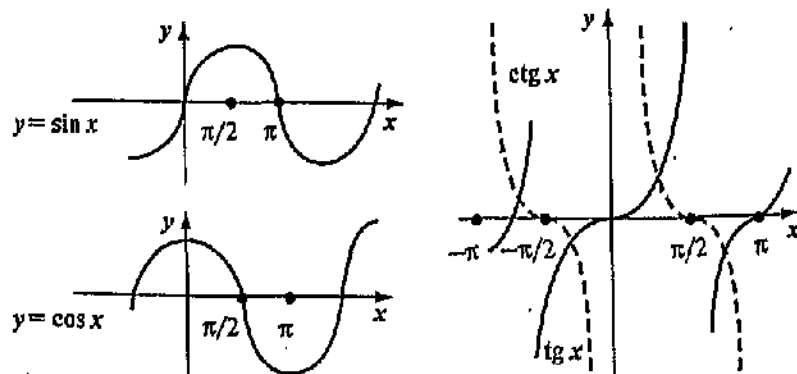


Рис. 3

4. Свойства функций одного переменного. Функция $y = y(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля, называется *четной* (*нечетной*), если $y(x) = y(-x)$ ($y(-x) = -y(x)$) для любого $x \in D(y)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной — относительно начала координат. Например, функция $y = x^2$ является четной, а $y = x^3$ — нечетной.

Функция $y(x)$ называется *периодической*, если существует такое $T > 0$, что $y(x + T) = y(x)$ для всякого $x \in D(y)$. Наименьшее из таких чисел T называется *периодом функции*. Известно, что тригонометрические функции являются периодическими.

Функция $y(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве X , если из того, что $x_1 < x_2$ вытекает, что $y_1 < y_2$ ($y_1 > y_2$). Например, функция предложения товара — возрастающая функция его цены, а функция спроса на товар — убывающая функция его цены. Функция полезности — возрастающая функция величины товара.

Функция $y(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на множестве X , если из того, что $x_1 \leq x_2$, $x_1, x_2 \in X$ вытекает, что $y_1 \leq y_2$ ($y_1 \geq y_2$). Очень часто, например, функция налоговой ставки — неубывающая функция годового дохода; такая налоговая ставка называется *прогрессивной*.

Возрастающие, убывающие, неубывающие, невозрастающие функции называются *монотонными*.

Функция $y(x)$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*) на множестве X , если существует M (m) такое, что $y(x) \leq M$ ($y(x) \geq m$) для любого $x \in X$. Функция, ограниченная и снизу и сверху, называется *ограниченной* на этом множестве. Например, функции $\sin x$ и $\cos x$ ограничены на всей числовой прямой.

Функция $y(x)$ называется *выпуклой* (*вогнутой*) на выпуклом множестве X , если ее график примерно таков, как показан на рис. 4, т.е. для любых $a, b \in X$ и любого $0 \leq \lambda \leq 1$ верно, что $y(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda y(a) + (1 - \lambda)y(b)$ ($y(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda y(a) + (1 - \lambda)y(b)$).

Например, производственная (однофакторная) функция является *вогнутой*, а функция спроса — *выпуклой*.

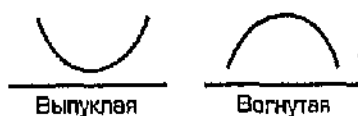


Рис. 4

ЗАДАЧИ

1. Найдите области определения и значений следующих функций: а) $y = \sqrt{2 - x}$; б) $y = 3/(x^2 - 3x + 2)$; в) $y = 1/\sin x$; г) $y = \sqrt{\ln x}$.

Отвечает. Только области определения: а) $(-\infty, 2]$; б) $x \neq 1, 2$; в) $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$; г) $[1, \infty)$.

2. Пусть $D = D(p)$ есть функция спроса на товар, найдите обратную к ней функцию определения цены в зависимости от спроса. Опишите, как находить эту обратную функцию по графику функции спроса.

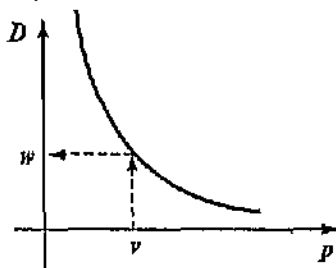


Рис. 5

Решение. Пусть на рис. 5 изображен график функции спроса. Как известно, эта функция убывающая. Обратную к ней функцию $p = p(D)$ по графику надо находить так: область определения функции $p(D)$ есть область значений функции $D(p)$. Теперь для каждого $v \in R(D)$ проводим вверх прямую до пересечения с графиком функции $D(p)$, после чего от точки на графике проводим влево горизонтальную пря-

мую до пересечения с вертикальной осью координат. Полученная точка w есть значение обратной функции при v .

3. Функция $y(x)$ задана несколькими точками своего графика: $(0, 0)$, $(2, 4)$, $(4, -4)$, $(6, 2)$, а между соседними точками график y нее — отрезок, соединяющий эти точки. Опишите эту функцию.

Указание. Воспользуйтесь уравнением прямой линии, проходящей через точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) (см. п. 1, раздел 2.1).

$$\text{Ответ: } y(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 12 - 4x & \text{при } 2 \leq x \leq 4, \\ -16 + 3x & \text{при } 4 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

В этом состоит идея *линейной интерполяции функции* — замены функции между ее двумя точками линейной функцией, проходящей через эти точки.

4. Вспомните графики основных элементарных функций. Постройте примерные графики функций: а) $y = -1 + 2x$; б) $y = x^2 - 8x + 7$; в) $y = \sin 2x$; г) $y = \ln(x - 5)$; д) $y = 2^x$; е) $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

5. Рассмотрим программу для компьютера:

```
Ввод x;
Для i = 1 до 3 сделать
  x = 2x + 1;
  y = x^2 + 4;
Вывод y;
```

Несомненно, что выдаваемое компьютером число y в ответ на введенное x реализует некоторую функцию. Сумеете ли выразить ее формулой? (Оператор заканчивается точкой с запятой.)

6. Четная ли функция $y = x^2 - 1$? Монотонная ли функция $y = \sqrt{x}$? Выпуклая ли функция $y = x^2 - 4$? Является ли периодической функция $y = \sin(2x + 1)$?

7. Пусть $S = S(p)$ есть функция предложения товара. Найдите обратную к ней функцию определения цены в зависимости от предложения. Опишите, как находить эту обратную функцию по графику функции предложения.

8. По своему содержательному смыслу производственная функция должна быть возрастающей. Какой смысл имеет функция, обратная к ней?

9. Пусть $W = W(Q)$ есть величина подоходного налога, уплачиваемая с годового дохода Q . Опишите обратную функцию. Какой примерно у нее график при прогрессивном подоходном налоге?

10. Функция процентной ставки подоходного налога определяется примерно так: при доходе от 0 до Q_1 взимается $p_1\%$, далее до Q_2 взимается $p_2\%$ и т.д. (см. выше п. 2). Задайте такую функцию формулами на разных промежутках.

11. Найдите квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$, если $y(-2) = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 5$.

Замечание. Замена функции квадратичной функцией, проходящей через три заданных точки графика исходной функции, называется *квадратичной интерполяцией* исходной функции.

12. Пусть функция задана описанием:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty \leq x \leq 0, \\ 2x & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 4 & \text{при } 2 \leq x. \end{cases}$$

Она выпукла, вогнута?

13. Какие из указанных функций ограничены на своей области определения: а) $y = \ln(2x/(x+1))$; б) $y = \ln(\sin x)$; в) $y = \sqrt{2^x}$; г) функции Торнквиста спроса на «предметы первой необходимости» и «предметы роскоши»:

$$y = ax/(x+b),$$

$$y = ax(x-c)/(x+b),$$

где a, b, c зависят от цен, а x есть доход.

14. Пусть M — это общее количество денег, V — скорость их обращения (сколько раз каждый рубль, доллар участвуют в расчетах в среднем за год), Y — национальный продукт или доход (национальный продукт — это все готовые товары и услуги, произведенные в экономической системе в стоимостном выражении; национальный доход — это все выплаты, полученные домашними хозяйствами: за-

работная плата, рента, прибыль; национальный продукт и национальный доход численно равны). Пусть P — это уровень цен (среднее взвешенное значение цен готовых товаров и услуг, выраженное относительно базового показателя, принятого за единицу). Связывая все эти величины, получим уравнение денежного обращения — основное уравнение классической количественной теории денег; так называемое *уравнение обмена* Фишера: $M = PY/V$. Проанализируйте, как меняются некоторые величины при неизменных других; например, как меняется уровень цен при изменении общего количества денег (и неизменности двух других величин V и Y).

4.3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИЙ

1. **Определение предела функции.** Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x , стремящемся к a ($x \rightarrow a$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$. Это записывают так: $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Следует обратить внимание на то, что в определении не требуется, чтобы функция была определена и в предельной точке, но она должна быть определена в какой-нибудь окрестности предельной точки (за вычетом самой предельной точки).

Если $x \rightarrow a$ и $x < a$, то пишут $x \rightarrow a - 0$; если $x \rightarrow a$ и $x > a$, то $x \rightarrow a + 0$. Соответствующие пределы называются *левосторонним* и *правосторонним* пределами функции в точке a . В этих определениях предполагается, что функция определена на некотором промежутке слева от предельной точки или справа. Для существования двустороннего предела функции (при $x \rightarrow a$) необходимо и достаточно, чтобы существовали оба односторонних предела и они совпадали.

Отдельно поясним, что такое предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$: $A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $K \in \mathbb{N}$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $x > K$.

Аналогично определяется предел функции при $x \rightarrow -\infty$.

К сожалению, при столь формальном определении предела (единственно возможном при современном уровне развития математики), напрочь пропадают вековые и даже тысячелетние поиски ученых, которые тщились выразить свои интуитивные представления о предельных переходах точными формулировками. Любознательные могут об этом прочитать в книгах, которые порекомендует преподаватель.

Предел функции может быть сведен в некотором смысле к *пределу последовательности*.

Пусть $x \rightarrow a - 0$, причем функция $f(x)$ определена на некотором промежутке слева от предельной точки a . Тогда можно бесчисленным множеством способов определить последовательность (x_n) , имеющую своим пределом слева x . Тогда: если $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$, то любая последовательность (x_n) , стремящаяся к a слева, имеет своим пределом A ; верно и обратное — если при любой последовательности (x_n) , стремящейся слева к a , последовательность $f(x_n)$ имеет своим пределом одно и то же число A , то $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$.

2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* (б.м.) при $x \rightarrow a$ (или $x \rightarrow a - 0$, или $x \rightarrow a + 0$ или $x \rightarrow \infty$, или $x \rightarrow -\infty$), если $\lim f(x) = 0$ при $x \rightarrow a$ (или соответственно $x \rightarrow a - 0$ и т.д.).

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* (б.б.) при $x \rightarrow a$ (или $x \rightarrow a - 0$, или $x \rightarrow a + 0$, или $x \rightarrow \infty$ или $x \rightarrow -\infty$), если $\lim |f(x)| = \infty$ при $x \rightarrow a$ (или соответственно $x \rightarrow a - 0$ и т.д.).

Например, функция $y = 1/x$ является б.б. при $x \rightarrow 0$, так как $\lim_{x \rightarrow 0} |1/x| = \infty$, и является б.м. при $x \rightarrow \infty$, потому что $\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x = 0$.

Рассмотрим свойства б.м. функций (б.м.ф.):

- 1) если $f(x)$ и $g(x)$ — б.м.ф. при каком-то одном и том же условии, то $f(x) \pm g(x)$ тоже является б.м.ф. при том же условии;
- 2) если $f(x)$ — б.м.ф. при каком-то условии и $g(x)$ — ограниченная функция на множестве X , на котором выполняется это условие, то их произведение $f(x) g(x)$ тоже является б.м.ф. при том же условии;
- 3) если $f(x)$ и $g(x)$ — б.м.ф. при каком-то одном и том же условии, то их произведение $f(x) g(x)$ тоже является б.м.ф. при том же условии;
- 4) если $f(x)$ — б.м.ф., то $1/f(x)$ — б.б. функция (б.б.ф.); если $g(x)$ — б.б.ф., то $1/g(x)$ — б.м.ф.

Сравнение бесконечно малых функций. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — б.м.ф. при некотором условии и пусть при этом существует $\lim (f(x)/g(x)) = h$. Тогда:

- 1) если $h = 1$, то f и g называются *эквивалентными* б.м.ф. и это записывают так: $f \sim g$;
- 2) если $0 < |h| < \infty$, то f и g — б.м.ф. одного порядка и пишут так: $f = O(g)$ или $g = O(f)$;
- 3) если $h = 0$, то f называется б.м.ф. высшего порядка относительно g и пишут так: $f = o(g)$;

- 4) если $|h| = \infty$, то g называется б.м.ф. высшего порядка относительно f и пишут так: $g = o(f)$.

3. Основные свойства пределов. Лемма. Если $\lim f(x) = A$, то $f(x) = A + a$, где a — б.м.ф.

Обратная лемма. Если $f(x) = A + a$, где A есть константа и a — б.м.ф., то $\lim f(x) = A$.

Пределы обладают следующими свойствами:

- 1) если C есть постоянная функция, то $\lim C = C$;
- 2) если существуют $\lim f(x)$ и $\lim g(x)$ при каком-то условии, то $\lim (f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ (при том же условии); отметим, что это свойство справедливо для любого конечного числа функций;
- 3) если существуют $\lim f(x)$ и $\lim g(x)$, то $\lim (f(x) g(x)) = (\lim f(x)) (\lim g(x))$ (при одном и том же условии); отметим, что это свойство справедливо для любого конечного числа функций; в частности, имеет место формула $\lim f^n(x) = (\lim f(x))^n$;
- 4) если существуют $\lim f(x)$ и $\lim g(x) \neq 0$, то $\lim (f(x)/g(x)) = (\lim f(x))/(\lim g(x))$ (при одном и том же условии);
- 5) если $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ и существуют $\lim f(x)$, $\lim g(x)$, $\lim h(x)$, то $\lim f(x) \leq \lim g(x) \leq \lim h(x)$.

Следствие. Если $f(x) \leq g(x)$ и существуют $\lim f(x)$, $\lim g(x)$, то $\lim f(x) \leq \lim g(x)$.

Приведем пример, когда предел функции в некоторой точке не существует.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = \sin 1/x$, определенную на $(0, 1)$. Рассмотрим последовательность $x_n = 1/(\pi n)$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $y(x_n) = 0$. Теперь рассмотрим последовательность $z_n = 1/(\pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $y(z_n) = 1$. Отсюда вытекает несуществование предела рассматриваемой функции при $x \rightarrow 0$. Отметим, что предельная точка не принадлежит области определения функции.

Во многих важных случаях существование предела можно установить с помощью следующей теоремы.

Теорема. Пусть функция монотонно не убывает (или не возрастает) при $x \rightarrow a - 0$. Если при этом функция ограничена сверху (снизу), то при $x \rightarrow a - 0$ она имеет конечный предел; в противном случае она стремится к ∞ ($-\infty$).

4. Первый и второй замечательные пределы. Рассмотрим $\lim (\sin x)/x$ при $x \rightarrow 0$. Можно доказать, что этот предел равен единице. Именно этот предел и называется *первым замечательным пре-*

делом. Его значение объясняется тем, что знание этого предела позволяет находить многие другие пределы.

В частности, получаем, что x и $\sin x$ — эквивалентные б.м.ф. при $x \rightarrow 0$. Так что $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Пример 2. Найдем $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$. Имеем: $\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2)$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2(x/2) = 1.$$

Рассмотрим $\lim (1 + 1/x)^x$ при $x \rightarrow \infty$. Можно доказать, что этот предел существует. Его обозначают специальным числом e . Это число примерно равно 2, 71. Именно этот предел и называется *вторым замечательным пределом*. Его значение объясняется еще и тем, что знание этого предела позволяет находить многие другие пределы.

Например, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$, так как очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x.$$

ЗАДАЧИ

1. Найти $\lim_{x \rightarrow a} \sin x$.

Решение. Имеем: $\sin(a + z) = \sin a \cdot \cos z + \sin z \cdot \cos a$. Используя первый замечательный предел, можно доказать (см. пример 2 выше), что $\lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1$, $\lim_{z \rightarrow 0} \sin z = 0$. Поэтому $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \lim_{z \rightarrow 0} \cos z + \cos a \lim_{z \rightarrow 0} \sin z = \sin a$.

Вывод: В любой точке a предел $\lim_{x \rightarrow a} \sin x$ равен значению функции $\sin x$ в предельной точке.

2. Найти следующие пределы: а) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 5x)/x$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)/x^2$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} ((x + a)/(x - a))^x$.

Решение. Для нахождения первых двух пределов используем первый замечательный предел. Имеем:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 5x)/x = \lim_{x \rightarrow 0} (5 \sin 5x)/(5x) = 5 \lim_{y \rightarrow 0} (\sin y)/y = 5;$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)/x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin^2 x/2)/x^2 = 2/4 \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/2)/(x/2)^2 = 1/2.$$

Для нахождения предела «в» используем второй замечательный предел. Имеем: $((x + a)/(x - a))^x = ((1 + 2a/(x - a))^x = ((1 + 2a/(x - a))^{(x-a)/(2a) + 1/2})^{2a}$. Значит, искомый предел равен:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^{(x + 1/2)2a} = e^{2a}.$$

3. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ не существует.

4. Доказать, что в любой точке области определения:

- а) $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$; б) $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$; в) $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$; г) $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$;
д) $\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a$.

Указание. В случае «а» используйте формулу $\cos(x + a) = \cos x \cdot \cos a - \sin x \cdot \sin a$; в остальных случаях используйте соответствующие формулы.

5. На основании свойств пределов сделайте вывод о существовании пределов: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)/x$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} ((2x^2 + x + 1)/x^2)$;

- в) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cos x)$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (x/\cos x)$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x/x)$.

6. В период расцвета финансовых пирамид в России (1993–1994 гг.) в приемном пункте концерна «Тибет» висело объявление о приеме денег на 3 мес. под 100% (не годовых, а за 3 мес., т.е. за 3 мес. было обещано двукратное увеличение вложенной суммы!), а на меньший срок процентная ставка была пропорционально меньше, т.е. на 1,5 мес. — 50%, на 3 недели — 25% и т.д. Отсюда выходило, что если положить деньги на 3 недели, а после того как срок пройдет, деньги изъять и тут же снова вложить, и т.д., то за 3 мес. сумма увеличится в $(1 + 0,25)^4 \approx 2,44$ раза. А если операцию снятия вклада повторять еженедельно, то за 3 мес. сумма увеличится в $(1 + 0,0875)^{12} \approx 2,71$. И это намного больше, чем если положить на 3 мес.! Каков максимальный коэффициент увеличения за 3 мес.? (Это если начисление процентов, снятие денег и опять вложение их происходило бы непрерывно и мгновенно.)

4.4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

В реальности имеет место следующее обстоятельство: если параметры, характеризующие ситуацию, немного изменятся, то немного изменится и сама ситуация. Здесь важно не то, что ситуация изменится, а то, что она изменится немного.

1. Определение непрерывности функции. Точки разрыва. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке a , если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной слева (справа)* в точке a , если $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$ ($\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$). Заметим, что при этом функция должна быть определена в некоторой окрестности слева (справа) от точки a . Заметим также, что непрерывность функции в точке равносильна непрерывности ее в этой точке и слева и справа.

Функция называется *непрерывной на интервале*, если она непрерывна в каждой точке этого интервала; *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) , непрерывна справа в точке b и непрерывна слева в точке a ($a < b$).

Пример 1. Следующие функции непрерывны на всей числовой оси: постоянная $y = C$; линейная $y = kx + b$; $\cos x$, $\sin x$; степенная x^n , $n \in \mathbb{N}$; показательная a^x , $a > 0$ (см. п. 4, раздел 4.3).

Точки, в которых функция не является непрерывной, называются *точками разрыва*. Если функция в точке a имеет конечный предел (двусторонний предел), но этот предел отличен от значения функции в этой точке (или точка не входит в область определения функции), то точка a называется *устранимой* точкой разрыва. Если функция в точке b имеет конечные односторонние пределы, но они не совпадают (тогда двусторонний предел не существует), то b называется *точкой разрыва 1-го рода*. Если функция в точке c не имеет хотя бы одного конечного одностороннего предела, то точка c называется *точкой разрыва 2-го рода*.

Пример 2. Точка 0 является устранимой точкой разрыва функции $y = (\sin x)/x$, так как функция имеет двусторонний предел $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x = 1$, но она не определена в точке 0.

Пример 3. Для функции «знак (сигнум)»

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

точка 0 является точкой разрыва 1-го рода, так как $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn} x = -1$,

$\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn} x = 1$, т.е. оба односторонних предела существуют, но они не равны.

Пример 4. Точка 0 является точкой разрыва 2-го рода функции $1/x$, так как $\lim_{x \rightarrow -0} 1/x = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +0} 1/x = \infty$.

Пример 5. Так называемая функция Дирихле

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

имеет разрыв 2-го рода в каждой точке.

2. Свойства непрерывных функций. Отметим следующие свойства:

- 1) если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a , то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (при условии, что $g(a) \neq 0$) также непрерывны в этой точке;
- 2) если функция $u = g(x)$ непрерывна в точке a и функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $g(a)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ также непрерывна в точке a ;
- 3) элементарные функции непрерывны в области их определения;
- 4) теорема Вейерштрасса: если функция непрерывна на отрезке, то она на этом отрезке достигает своих наименьшего и наибольшего значений;
- 5) теорема Больцано—Коши: пусть функция определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков; тогда найдется точка $c \in (a, b)$, в которой функция равна нулю;
- 6) асимптоты: прямая l называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{OM \rightarrow \infty} MN = 0$, где MN — расстояние точки

M на графике функции от этой прямой; OM — расстояние этой точки от начала координат (рис. 1).

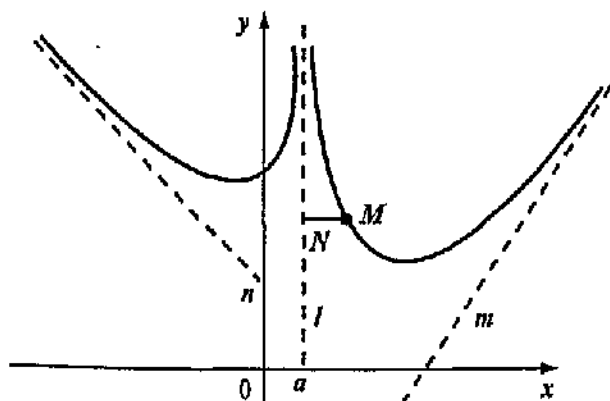


Рис. 1

Асимптоты бывают *вертикальными* и *наклонными*. Если $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \infty$, то график функции имеет вертикальную асимптоту (прямая l на рис. 1, уравнение которой $x = a$).

Для наклонной асимптоты условие $OM \rightarrow \infty$ можно заменить условием $x \rightarrow \infty$ или $x \rightarrow -\infty$. В первом случае наклонная асимптота называется *правосторонней* (прямая m на рис. 1), а во втором случае — *левосторонней* (прямая n).

Частным случаем наклонных асимптот являются горизонтальные асимптоты.

В заключение отметим, что непрерывность элементарных функций в области определения используется для нахождения пределов.

Ведь если функция $f(x)$ непрерывна в точке a , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

3. Экономическая интерпретация непрерывности. Большинство функций, используемых в экономике, являются непрерывными и это позволяет высказывать вполне значимые утверждения экономического содержания.

1. Налоговая ставка N имеет примерно такой график, как на рис. 2, а.

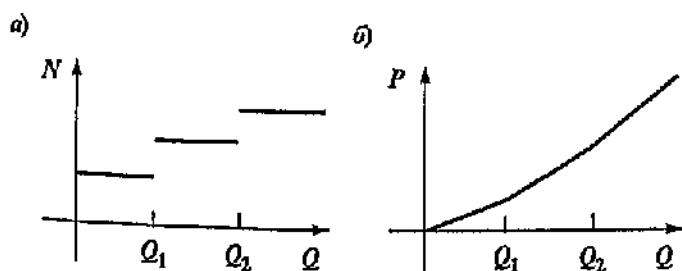


Рис. 2

На концах промежутков она разрывна и разрывы эти 1-го рода. Однако сама величина подоходного налога P (рис. 2, б) является непрерывной функцией годового дохода Q . Отсюда, в частности, вытекает, что если годовые доходы двух людей отличаются незначительно, то и различия в величинах подоходного налога, которые они должны уплатить, также не должны быть большими. Интересно, что это обстоятельство воспринимается огромным большинством людей как совершенно естественное, над которым они даже не задумываются. Вот если бы это было не так ... Когда это не так, т.е. когда результат не непрерывно зависит от начальных данных, от парамет-

ров, характеризующих задачу (ситуацию), то такая задача (ситуация) называется *некорректной*.

2. По своему смыслу такие функции, как функция спроса $D(p)$, функция предложения $S = S(p)$, непрерывно зависят от p . Значит, при малых колебаниях цен спрос и предложения также изменяются незначительно. При более глубоком анализе обнаруживаются, однако, чисто психологические причины, по которым спрос, например, может измениться скачкообразно. Например, так бывает при «пробитии» круглой цены. Цена растет, растет, но люди терпят и спрос уменьшается незначительно. И вот цена замерла около круглой цифры. Когда цена, наконец, превысит эту круглую цифру, может произойти скачкообразное уменьшение спроса. Это хорошо знают финансисты, работающие на валютных и других финансовых рынках.

3. При нахождении рыночной цены облигации (см. п. 2, раздел 4.1) мы фактически вывели формулу $S = Np(100 + r)/(100r)$, где N — номинал облигации, p — ставка процента, r — темп инфляции. При выводе мы дисконтировали к сегодняшнему моменту бесконечный ряд платежей в будущем. Тем не менее по формуле видно, что S есть элементарная функция от ставки процента p и, значит, непрерывно зависит от нее. Поэтому при малом изменении ставки процента рыночная цена облигации изменится также мало.

ЗАДАЧИ

1. На языке « $\epsilon - \delta$ » доказать непрерывность функции $y = |x|$.

Решение. Если бы эта функция была элементарной, то можно было бы просто сослаться на общее положение о непрерывности элементарных функций (см. п. 2 раздела 4.2). Однако эта функция не является элементарной, поэтому ее непрерывность нужно специаль-

но доказывать. Заметим, что $y = \begin{cases} -x, & \text{при } x \leq 0, \\ x, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$ Пусть $a \neq 0$. Существует окрестность точки a , не содержащая 0, на которой исследуемая функция совпадает с элементарной функцией ($y = x$ или $y = -x$). Значит, в любой точке, отличной от нуля, исследуемая функция непрерывна. Поэтому нужно доказать только ее непрерывность в точке 0. Для каждого $\epsilon > 0$ нужно найти такое $\delta > 0$, что как только $|x| < \delta$, то $|y| < \epsilon$. Но для этого достаточно взять $\epsilon = \delta$.

2. Пусть $E(x)$ — функция «целая часть x », а $F(x)$ — функция «дробная часть x ». Нарисуйте графики этих функций, выясните, в каких точках эти функции разрывны, и определите характер разрывов.

Решение. Графики обеих функций приведены на рис. 3.

Из графиков видно, что функция $E(x)$ непрерывна справа в каждой точке, в том числе и целой n , где функция равна n . В то же время

предел слева в точке n равен $n - 1$. Итак, $E(x)$ разрывна в каждом целом числе и все эти разрывы 1-го рода.

Функция $F(x)$ непрерывна справа в каждой точке, в том числе и целой n , где функция равна нулю. В то же время предел слева в каждой целой точке равен единице. Итак, $F(x)$ разрывна в каждом целом числе и все эти разрывы 1-го рода.

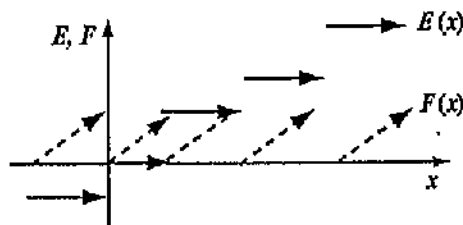


Рис. 3

3. На языке « $\epsilon - \delta$ » доказать непрерывность функции $y = x^2$.

4. Рассмотрите функцию округления $y = O(x)$. Нарисуйте ее график. В каких точках у нее разрывы? Какого рода?

5. Найдите асимптоты функций Торнквиста спроса на «предметы первой необходимости» и «предметы роскоши»: $y = ax/(x + b)$, $y = ax(x - c)/(x + b)$, где a, b, c зависят от цен, а x есть доход.

Тема 5.

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ В ЭКОНОМИКЕ

5.1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1. Определение производной функции, ее физический и геометрический смысл. Пусть дана функция $f(x)$. Фиксируем произвольную точку x из области определения $D(f)$ функции $f(x)$. Пусть x' — другая точка из $D(f)$, тогда разность $x' - x$ называется *приращением аргумента* и обозначается Δx , а разность значений функции $f(x') - f(x)$ называется *приращением функции* и обозначается $\Delta f(x)$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения ее приращения $\Delta f(x)$ в этой точке к приращению аргумента Δx при $x \rightarrow 0$ (если этот предел существует). Производная обозначается $y'(x)$ или $f'(x)$. Процесс нахождения производной называется *дифференцированием*. Итак, $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x)/\Delta x$.

В физическом смысле отношение $\Delta f(x)/\Delta x$ является средней скоростью изменения функции $f(x)$ на отрезке $[x, x + \Delta x]$, а $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x)/\Delta x = f'(x)$ — мгновенной скоростью изменения этой функции в точке x .

Например, если функция $y = f(x)$ задает зависимость пути y , пройденного некоторым телом, от времени x , то производная $y'(x)$ является скоростью движения; если функция дает зависимость количества производимой кем-то продукции от времени, то ее производная является производительностью труда.

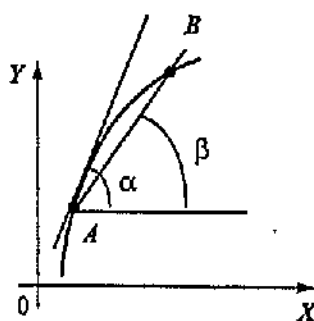


Рис. 1

Геометрически отношение $\Delta f(x)/\Delta x$ является тангенсом угла β (рис. 1), который образует секущая, проходящая через точки A и B , с осью OX . Если $x \rightarrow 0$, то точка B стремится к точке A , а угол β стремится к углу α , который образует касательная к графику функции в точке A с осью OX и, следовательно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x)/\Delta x =$

$\lim_{B \rightarrow A} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$. Отсюда получаем

$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k$ (геометрический смысл производной), где k — угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке x .

Следовательно, уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$.

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x , если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(x) = A \Delta x + \alpha \Delta x, \quad (1)$$

где A — константа, а α — бесконечно малая функция (б.м.ф.) при $\Delta x \rightarrow 0$.

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции в некоторой точке является существование ее производной в этой точке.*

Доказательство необходимости. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x . Тогда $\Delta f(x) = A \Delta x + \alpha \Delta x$, где α — б.м.ф. при $\Delta x \rightarrow 0$. Тогда $\Delta f(x)/\Delta x = A + \alpha$. Отсюда по обратной лемме (см. п. 3, раздел 4.3) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x)/\Delta x = A$, т.е. производная функции существует.

Доказательство достаточности. Пусть существует производная функции $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x)/\Delta x$. Согласно лемме (см. также п. 3 раздела 4.3) $\Delta f(x)/\Delta x = f'(x) + \alpha$, где α — б.м.ф. при $\Delta x \rightarrow 0$ или $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$, т.е. функция дифференцируема в точке x .

Замечание. В ходе доказательства также получено, что для дифференцируемой функции равенство (1) можно записывать в виде $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$, где α — б.м.ф. при $x \rightarrow 0$.

Теорема 2. Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в ней.

Доказательство. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , то $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$, где α — б.м.ф. при $\Delta x \rightarrow 0$. Откуда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0$, т.е. функция непрерывна в точке x .

2. Применение производной в экономике. Рассмотрим однофакторную, или одноресурсную, производственную функцию $y = f(x)$, которая дает объем производимой продукции за единицу времени в зависимости от объема x затраченного ресурса. Этот ресурс весьма часто — количество живого человеческого труда, выраженного в виде человеко-часов или числа работников. Пусть в нынешнем состоянии число работников фирмы равно a . Обычно производственные функции дифференцируемы, так что $f(a + 1) \approx f(a) + f'(a)$. Если число работников a велико, то вышенаписанное приближенное равенство довольно точное. Но что такое $f'(a)$ в этом случае? Это не что иное, как добавочная продукция, производимая новым сотрудником предприятия за единицу времени.

Пусть v — цена единицы продукции, а p — зарплата работника за единицу времени. Тогда, если $vf'(a) > p$, то надо нанять еще одного сотрудника, так как он приносит фирме больше, чем она ему платит. Это несложное правило имеет универсальный характер и называется *золотым правилом экономики*.

Вообще в рассматриваемой ситуации производную производственной функции в точке a в экономике называют *предельной производительностью труда* (при размере фирмы a), в отличие от средней, которая равна $f(a)/a$.

Рассмотрим некоторые введенные функции (см. п. 2 раздела 4.2) и определим экономический смысл их производных.

Функция спроса $D = D(p)$ — зависимость спроса D на некоторый товар от его цены p . Производная $D'(p)$ дает приблизительно увеличение спроса при увеличении цены на одну единицу. Поскольку, как известно, при повышении цены спрос уменьшается, то на самом деле абсолютное значение производной показывает уменьшение спроса со стороны покупателей на товар при повышении его цены на одну единицу.

Функция предложения $S = S(p)$ — зависимость предложения некоторого товара от его цены p . Производная $S'(p)$ дает приблизительно увеличение предложения товара со стороны продавцов (производителей) при увеличении цены на одну единицу.

Функция полезности $u(x)$ — субъективная числовая оценка данным индивидом полезности количества x товара для него. Производ-

ная $u'(x)$ дает приблизительную оценку дополнительной полезности от приобретения еще одной единицы товара.

Налоговая ставка — зависимость налога N в процентах от величины годового дохода Q . Пусть P — само значение налога, которое надо платить с годового дохода Q . Тогда производная P и есть налоговая ставка N .

Производная функции $y = f(x)$ дает величину мгновенной скорости изменения пройденного за время x пути y , производная производственной функции дает предельную производительность труда и т.д. Но в экономике чрезвычайно удобно задавать такие вопросы: на сколько процентов изменится спрос на товар, если цена на него увеличится на 1%? На сколько процентов изменится предложение товара, если цена на него увеличится на 1%? и т.д. Такие вопросы и ответы на них вводят новое понятие «эластичность функций по аргументу» или *относительная производная*.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть Δx — приращение аргумента, $\Delta f(x)$ — соответствующее приращение функции. Тогда $\Delta x/x$ — относительное изменение аргумента, $\Delta f(x)/f(x)$ — относительное изменение функции. Величина $(\Delta f(x)/f(x))/(\Delta x/x)$ — отношение относительного изменения функции к относительному изменению аргумента — называется *средней эластичностью* функции по аргументу на отрезке $[x, x + \Delta x]$, а предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta f(x)/f(x))/(\Delta x/x) = f'(x)/(f(x)/x)$ называется *эластичностью*

функции y по аргументу в точке x и обозначается E_x^y . Следовательно, если эластичность спроса на товар по цене равна -2 , это означает, что при повышении данной цены на 1% спрос уменьшится на 2%. А если эластичность выпуска продукции по труду равна $1/2$, это означает, что для увеличения выпуска продукции на 1% надо увеличить количество работников на 2%.

Пример 1. Для функции спроса $D = 40 - 2p$ найти эластичность спроса по цене при $p = 4$.

Решение. $E_p^D(4) = D'(4)/(D(4)/4) = -2/8 = -1/4$.

3. Правила дифференцирования (нахождения производных функций). Производные основных элементарных функций:

- 1) постоянная величина: $C' = 0$;
- 2) степенная функция: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;
- 3) показательная функция: $(a^x)' = a^x \ln a$;
- 4) показательная функция с основанием e : $(e^x)' = e^x$;
- 5) логарифмическая функция с натуральным логарифмом: $(\ln x)' = 1/x$;

- 6) логарифмическая функция: $(\log_a x)' = (1/x) \ln a$;
 7) тригонометрические функции: $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$, $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$.

Структурные правила дифференцирования:

- 1) производная суммы: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
- 2) производная произведения: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
- 3) производная частного: $(f(x)/g(x))' = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x))/g^2(x)$;
- 4) производная сложной функции: $(u(f(x)))' = u'(f(x))f'(x)$;
- 5) производная обратной функции: $y' = 1/x'$.

Вывод этих правил можно посмотреть в учебниках.

Производные неявных и параметрических функций. Пусть функция $y = y(x)$ задана неявно при помощи уравнения $F(x, y) = 0$. Чтобы найти ее производную, нужно это равенство продифференцировать по x с учетом зависимости y от x и затем решить полученное уравнение относительно y' .

Пример 2. Найти y'_x от неявной функции $e^y + y + \cos y = 2 + \sin x$.

Решение. Продифференцируем данное равенство по x , затем найдем y'_x :
 $e^y \cdot y' + y' - (\sin y) y' = \cos x$, откуда $y'_x = \cos x / (e^y + 1 - \sin y)$.

Функция $y = y(x)$ называется *параметрической*, если значения функции и значения аргумента задаются при помощи функций от вспомогательной величины t , называемой *параметром*: $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Правило нахождения производной параметрической функции: если существуют $x'(t)$ и $y'(t)$, то $y'_x = y'(t)/x'(t)$ ($x'(t) \neq 0$).

Пример 3. Найти y' от функции $y(x)$, заданной параметрически: $x(t) = t^3 + 4t^2$, $y(t) = t^2 + 1$.

Решение: $x'(t) = 4t^2 + 12t^2$, $y'(t) = 2t$, значит, $y'_x = 2t/(4t^2 + 12t^2) = 1/(2t^2 + 6t)$.

Производные высших порядков. Производная функции $y = f(x)$ является новой функцией того же аргумента $y'(x)$. Производная этой функции называется *производной 2-го порядка* по отношению к исходной функции $(y'(x))'$ и она обозначается $y''(x)$ или $f''(x)$. Аналогично определяются производная 3-го порядка, производная 4-го порядка и дальнейшие производные.

ЗАДАЧИ

1. В широко известном романе Д. Гранина «Иду на грозу» главный герой Сергей Крылов, исключенный из института за непосещение лекций, ушел работать на завод. «Завод переживал неприятности с приводами новой серии специальных контактов. Проходя по цеху,

Крылов наткнулся на группу инженеров, обсуждавших очередную аварию. Он попросил снова запустить пресс. Его интересовало, на каком участке бьются каретки. Глазный инженер выслушал его совершенно серьезно и приказал приготовить пресс к запуску, не забыв упомянуть, что каждая каретка стоит 2000 руб.» (Это были еще те советские рубли, а доллар стоил только 68 коп.!) «Тогда Крылов отказался от испытания. Так даже интереснее, сказал он и ушел по своим делам. Смена его кончилась и он зашел в кабинет главного инженера. У того шло совещание, но Главный попросил его зайти и спросил, какие у него есть соображения. Крылов спросил, что представляет собой дуга, по которой движется каретка, Круг? Он обрадовался: тогда все логично, каретка должна ломаться, поскольку имеется разрыв производной... Его спросили, что же делать? Он задумался, затем сообщил, что следует заменить окружность параболой». Главный взял его в свое бюро.

Следующая задача похожа на задачу Крылова.

Функция $y = |x|$ в точке 0 не имеет производной. Надо заменить ее параболой на некотором интервале, содержащем нуль, чтобы получившаяся функция всюду имела производную, как показано на рис. 2. У Крылова в качестве функции $y = |x|$ было сопряжение круга с прямой.

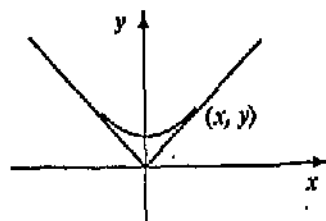


Рис. 2

Решение. Будем искать параболу в виде $y = x^2 + a$. Тогда в точке (x, y) сопряжения параболы и правой половины графика выполнены уравнения (точка (x, y) принадлежит обоим графикам и в этой точке равны производные):

$$\begin{cases} x^2 + a = x, \\ 2x = 1. \end{cases}$$

Решая систему, получаем: $x = 1/2$, $a = 1/4$, откуда искомая функция есть

$$y = \begin{cases} |x| & \text{при } |x| \geq 1/2, \\ x^2 + 1/4 & \text{при } |x| \leq 1/2. \end{cases}$$

Замечание. В последние годы большую популярность в теории приближений в некоторых прикладных исследованиях приобрели *сплайны*. Так называются функции, представленные на разных участках многочленами и имеющие непрерывные производные до какого-то порядка включительно. Крылов и мы, при решении задачи Крылова, как раз построили сплайн — составленную из параболы и двух прямых лучей функцию, имеющую непрерывную 1-ю производную (у Крылова сплайн имел непрерывную 2-ю производную).

2. Используя правила дифференцирования, найдите производные следующих функций: а) $y = (2x^2 + 3)^4$, б) $y = \sin(2x + x^2)$, в) $y = e^{x^2}$, г) $y = \lg(5x + 1)$, д) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$, е) $y = (\ln(\sin^2 x))^3$.

3. Убедитесь, что функция $y = 2|x|$ не имеет производной в точке 0. Замените эту функцию на небольшом интервале, содержащем 0, параболой так, чтобы получился простейший сплайн.

4. Функция полезности должна удовлетворять двум условиям: ее первая производная должна быть положительной, а вторая — отрицательной. Содержательный смысл: товар желателен, большее его количество обладает и большей ценностью, полезностью; однако с ростом количества потребляемого товара рост его полезности уменьшается. Убедитесь в том, что нижеприведенные функции удовлетворяют этим условиям: а) $y = \ln x$, б) $y = \sqrt{x}$.

5. Для функции спроса $D = 10/p$ в зависимости от цены p найдите эластичность спроса по цене в точках: 1, 2, 5, 10.

6. Для функции предложения $S = 5p$ в зависимости от цены p найдите эластичность предложения по цене в точках: 1, 2, 5, 10.

7. Составьте уравнения касательных к графику функции $y = 2x^2 - 1$ в точках с абсциссами: 0, 2, 4.

8. С какой относительной скоростью растет площадь круга, если его радиус увеличивается на 2% в час?

9. Из одного и того же порта одновременно вышли пароход A с направлением на север со скоростью 30 км/ч и пароход B с направлением на восток со скоростью 40 км/ч. С какой скоростью они удаляются друг от друга?

5.2. СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

1. Теоремы о дифференцируемых функциях.

Теорема Ферма. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке a , т.е. существует $f'(a)$, и всюду в некоторой окрестности этой точки $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$), т.е. $f(a)$ является наибольшим (наименьшим) значением функции в этой окрестности, то $f'(a) = 0$.

Доказательство. $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta f(a)/\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} (\Delta f(a)/\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} (\Delta f(a)/\Delta x) = 0$, так как одновременно $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} (\Delta f(a)/\Delta x) \leq 0$ и $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} (\Delta f(a)/\Delta x) \geq 0$ ($\lim_{\Delta x \rightarrow -0} (\Delta f(a)/\Delta x) \geq 0$ и $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} (\Delta f(a)/\Delta x) \leq 0$).

Теорема Ферма лежит в основе нахождения экстремумов функций с помощью производной. Приведем в связи с этой теоремой определение экстремума функции.

Значение функции $f(a)$ называется *максимумом* (минимумом) функции $f(x)$, если оно является наибольшим (наименьшим) в некоторой окрестности точки a , т.е. в этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$). Соответствующее значение аргумента a называется *точкой максимума* (минимума). Максимумы и минимумы функции называются *экстремумами функции*, а точки максимума и минимума — *точками экстремумов*.

Среди математиков нет единогласия в определении экстремумов. Данное определение наиболее подходит для нашего курса.

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$, то в некоторой точке интервала $c \in (a, b)$ ее производная равна нулю.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса (см. п. 2, раздел 4.4) функция принимает на отрезке $[a, b]$ свои наибольшее и наименьшее значения. По крайней мере одно из этих значений она принимает во внутренней точке отрезка; иначе, поскольку $f(a) = f(b)$, функция была бы постоянна на всем отрезке, но тогда ее производная была бы равна нулю всюду на интервале (a, b) . Итак, какая-то точка экстремума является внутренней. Но тогда по теореме Ферма производная в этой точке равна нулю.

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , то найдется точка $c \in (a, b)$, для которой $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - x(f(b) - f(a))/(b - a)$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, значит, существует такая точка $c \in (a, b)$, что $F'(c) = 0$, или $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$, что и требовалось доказать.

Теорема Лагранжа называется еще *теоремой о среднем*: значение $f'(c)$ есть средняя скорость изменения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

2. Дифференциал функции. Для дифференцируемой функции $y = f(x)$ ее приращение можно записать в виде

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x, \quad (1)$$

где α — б.м.ф. при $\Delta x \rightarrow 0$.

Дифференциалом dy или $df(x)$ функции $y = f(x)$ в точке x называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке:

$$dy = f'(x)\Delta x. \quad (2)$$

Приращение аргумента Δx обозначают также dx , и тогда формулу (2) можно записать в виде $dy = f'(x)dx$. Из этого равенства видно,

что производную можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента: $f'(x) = dy/dx$.

Для дифференциала справедливы аналоги формул дифференцирования, которые легко получаются из соответствующих формул дифференцирования (см. п. 1, раздел 5.1).

Если в формуле (1) отбросить второстепенное слагаемое $\alpha \Delta x$, то получим приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x) \Delta x$ или $\Delta y \approx f'(x) dx$, используемое в приближенных вычислениях и для линеаризации сложных зависимостей.

Пример 1. Площадь круга радиуса r равна $S = \pi r^2$. Если радиус увеличить на Δr , то соответствующее приращение ΔS величины S будет площадью кругового кольца между concentрическими окружностями радиусов r и $r + \Delta r$. Из выражения $\Delta S = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2$ сразу усматриваем, что главной частью ΔS при $r \rightarrow 0$ будет $2\pi r \Delta r$ — это и есть дифференциал dS .

Особенно удобно и естественно использовать понятие дифференциала для оценки погрешностей. Пусть, например, величину x мы измеряем или вычисляем непосредственно, а зависящую от нее величину y определяем по формуле $y = f(x)$. При измерении величины x обыкновенно вкрадывается погрешность Δx , которая влечет за собою погрешность Δy величины y . Ввиду малых значений этих погрешностей полагают $\Delta y = dy$, т.е. заменяют приращение дифференциалом.

Пример 2. С какой относительной погрешностью надо измерить радиус шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до 1%?

Решение. Напомним, что $V = (4/3)\pi r^3$. Значит, $dV/V = 3 dr/r$. Нужно, чтобы $dV/V \leq 0,01$, значит, $dr/r \leq (1/3) \cdot 0,01$.

Ответ: с точностью $1/3\%$.

Пусть $y = f(x)$ — произвольная функция. Предположим, что она имеет в точке a производную. Тогда, как уже указывалось, имеет место приближенное равенство $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$, и это равенство тем точнее, чем ближе x к a . Таким образом, в малом всегда можно произвольную функцию, какую угодно сложную, приближенно заменить линейной функцией. Такой подход называется *линеаризацией* функции $f(x)$. Графически такой подход выглядит как замена графика функции касательной, проведенной к графику в точке a .

Пусть, например, $y = f(x)$ есть зависимость прибыли от числа занятых работников x . Если в данный момент число занятых a довольно велико, то приближенное равенство $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ показывает, что приближенно, при малых отклонениях x от a , изменение прибыли линейно зависит от изменения числа работников.

Дифференциал функции $dy = df(x)$ является функцией того же аргумента. Дифференциал этой функции называется *дифференциала-*

лом 2-го порядка исходной функции $d(dy) = d(df(x)) = d^2y = d^2f(x)$; дифференциал последней функции называется *дифференциалом 3-го порядка* и т.д. Нетрудно убедиться в том, что $d^2y = y''dx^2$, где dx^2 есть просто $(dx)^2$.

Пример 3. Напишем дифференциал 2-го порядка от функции $y = (x + 1)^4$. Для этого надо найти 2-ю производную этой функции. Имеем $y'' = 12(x + 1)^2$. Следовательно, $d^2y = 12(x + 1)^2 dx^2$.

3. Формула и многочлен Тейлора. Пусть $y = f(x)$ — функция, имеющая в некоторой точке c производные всех порядков до n включительно. Это значит, что функция определена и имеет производные всех порядков до $(n - 1)$ включительно в некотором интервале (a, b) , содержащем точку c , и, кроме того, имеет производную n -го порядка $f^{(n)}(c)$. Составим для функции многочлен Тейлора $P(c) = f(c) + f'(c)(x - c)/(1!) + f''(c)(x - c)^2/(2!) + \dots + f^{(n)}(c)(x - c)^n/(n!)$.

Вычисляя последовательно $P(c)$, $P'(c)$, $P''(c)$, ..., $P^{(n)}(c)$, убеждаемся, что этот многочлен и его производные до n -й включительно в точке c имеют те же значения, что и функция $f(x)$ и ее производные. Поэтому имеются основания считать этот многочлен приближением функции $f(x)$. Остаток $r(x) = f(x) - P(x)$ как раз измеряет степень этого приближения.

Можно доказать, что при указанных условиях этот остаток $r(x)$ при $x \rightarrow c$ представляет собой бесконечно малую функцию по сравнению с $(x - c)^n$, т.е. $r(x) = o((x - c)^n)$.

Поэтому можно записать

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c)/(1!) + \dots + f^{(n)}(c)(x - c)^n/(n!) + o((x - c)^n). \quad (3)$$

Формула (3) называется *формулой Тейлора* с дополнительным членом в форме Пеано. Эта формула является естественным обобщением формулы $f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + o(x - c)$, которая есть просто выражение дифференцируемости функции $f(x)$ в точке c .

Всего проще выглядит формула Тейлора, если $c = 0$ (в этом случае ее называют еще *формулой Маклорена*):

$$f(x) = f(0) + f'(0)x/(1!) + \dots + f^{(n)}(0)x^n/(n!) + o(x^n). \quad (4)$$

Пример 4. Пусть $f(x) = e^x$, тогда $f^{(n)}(x) = e^x$ при любом n . Так как в этом случае $f^{(n)}(0) = 1$ при любом n , то по формуле (4) получаем: $e^x = 1 + x + x^2/(2!) + \dots + x^n/(n!) + o(x^n)$ при любом n .

В частности, при $x = 1$ имеем: $e = 1 + 1 + 1/(2!) + 1/(3!) + \dots$.

В качестве справочной информации приведем формулы Тейлора для функций $\sin x$, $\cos x$ (при некотором терпении и настойчивости вы сами можете получить эти формулы): $\sin x = x - x^3/(3!) + x^5/(5!) - \dots + o(x^{2n+1})$; $\cos x = 1 - x^2/(2!) + x^4/(4!) - \dots + o(x^{2n})$.

ЗАДАЧИ

1. Составьте линеаризацию функции $y = 10 K^{1/3}$ в точке 8, функции $y = \sqrt{2KM/h}$ в точке $K = 2000$ (M и h — параметры).
2. Составьте формулу Маклорена с точностью до 4-го члена для функций: $y = x^6$, $y = \sqrt{x+1}$, $y = \ln(x+1)$, $y = e^{\sin x}$, $y = \cos x^2$.
3. Составьте формулу Тейлора с точностью до 3-го члена для функций: а) $\operatorname{tg} x$ в точке 0, б) $\operatorname{ctg} x$ в точке $\pi/2$.

Тема 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

6.1. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ И ИХ НАХОЖДЕНИЕ

1. Экстремум функции и его нахождение. Определение экстремумов функции было дано в разделе 5.2. В силу важности этого понятия напомним его еще раз.

Значение функции $f(a)$ называется *максимумом (минимумом)* функции $f(x)$, если оно является наибольшим (наименьшим) в некоторой окрестности точки a , т.е. в этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$). Соответствующее значение аргумента a называется *точкой максимума (минимума)*. Максимумы и минимумы функции называются *экстремумами функции*, а точки максимума и минимума — *точками экстремумов*.

Напомним, что точка является внутренней точкой области определения функции, если некоторая окрестность точки целиком содержится в области определения.

Точка a называется *критической точкой* функции $f(x)$, если $f'(a) = 0$ или $f'(a)$ не существует. Точка a называется *стационарной точкой* функции $f(x)$, если она есть внутренняя точка и $f'(a) = 0$.

Теорема 1 (*необходимый признак экстремума*). Если функция имеет во внутренней точке a экстремум, то a является критической точкой этой функции.

Доказательство. Так как a — внутренняя точка экстремума, то всюду в некоторой ее окрестности $f(x) \leq f(a)$ или $f(x) \geq f(a)$. Если $f'(a) \neq 0$

не существует, то a — критическая точка по определению. А если $f'(a)$ существует, то выполнены условия теоремы Ферма (см. п. 1, раздел 5.2) и тогда по этой теореме $f'(a) = 0$.

Теорема 2 (первый достаточный признак экстремума). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки a и дифференцируема в ней всюду, кроме, быть может, точки a . Тогда:

- 1) если $f'(x) \geq 0$ при $x < a$ и $f'(x) \leq 0$ при $x > a$, то a есть точка максимума функции;
- 2) если $f'(x) \leq 0$ при $x < a$ и $f'(x) \geq 0$ при $x > a$, то a есть точка минимума функции.

Теорема 3 (второй достаточный признак экстремума). Пусть $f(x)$ и ее производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны в некоторой окрестности точки a и пусть $f'(a) = 0$. Тогда:

- 1) если $f''(x) < 0$, то a есть точка максимума функции;
- 2) если $f''(x) > 0$, то a есть точка минимума функции.

Доказательства этих двух достаточных признаков экстремума можно посмотреть в учебнике. В качестве приложения описанных методов нахождения экстремумов будет рассмотрена формула Уилсона.

2. Формула Уилсона. Рассмотрим работу идеального склада. Такой склад отпускает своим клиентам запасенный товар (сырье, полуфабрикаты и т.п.) равномерно, с постоянной скоростью M ед. товара за единицу времени. Издержки хранения единицы запасов в течение единицы времени обозначим h . Склад работает циклами длительностью T (см. рис. 1). В начале цикла на склад привозят запасы объемом Q . При этом склад несет так называемые накладные расходы K , не зависящие от объема Q . По мере уменьшения запасов, в нужный момент, начинается организация новой поставки запасов на склад. Очередная партия запасов прибывает в момент полного исчерпания запасов. Но считается, что разгрузка этой партии происходит практически мгновенно.

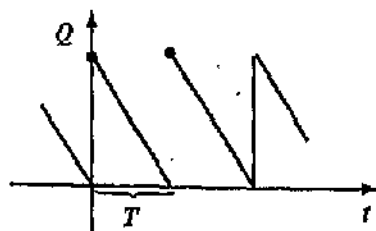


Рис. 1

Задача состоит в минимизации средних расходов склада за единицу времени. При объеме партии поставки Q длительность цикла равна Q/M , значит, средние за единицу времени накладные расходы равны KM/Q . Учтем, что средняя величина запаса на складе равна $Q/2$, следовательно, средние издержки хранения за единицу времени

равны $hQ/2$. Таким образом, суммарные средние издержки за единицу времени равны $G = KM/Q + hQ/2$. Для нахождения минимума найдем производную по Q и приравняем ее нулю: $G' = -KM/Q^2 + h/2 = 0$, откуда $Q = \sqrt{2KM/h}$. При этом значении 2-я производная $G'' = 2KM/Q^3 > 0$, так что это действительно минимум. Формула $Q = \sqrt{2KM/h}$ и называется *формулой Уилсона*. Минимальные издержки равны $G_{\min} = \sqrt{2KMh}$.

Выпедем еще критерий оптимальности объема партии. Размер партии оптимален (с точки зрения минимизации средних издержек за единицу времени) тогда и только тогда, когда за цикл накладные расходы равны издержкам хранения.

Действительно, при оптимальном размере партии $Q = \sqrt{2KM/h}$ накладные расходы за цикл равны K , а издержки хранения за цикл равны $h(Q/M)Q/2 = hQ^2/(2M) = h2KM/(h2M) = K$. И наоборот, равенство обоих видов издержек дает $K = h(Q/M)Q/2$, откуда $Q = \sqrt{2KM/h}$, что и требовалось доказать.

Пример 1. На склад цемент привозят в барже по 1500 т. Накладные расходы равны 2000 дол. Издержки хранения оцениваются в 10 центов с тонны за сутки. Каждые сутки склад отпускает 50 т цемента. Найти издержки хранения за цикл. Каков оптимальный объем партии поставки?

Решение. Средний объем хранящегося на складе цемента равен 750 т. Следовательно, средние издержки хранения за сутки равны 75 дол. Цикл имеет длительность 30 дней. Значит, издержки хранения за цикл равны 2250 дол. Оптимальный объем партии поставки рассчитаем по формуле Уил-

сона: $Q = \sqrt{2KM/h} = \sqrt{2 \cdot 2000 \cdot 50/0,1} \approx 1420$ т.

Замечание. Во многих практически важных случаях методы дифференциального исчисления не позволяют находить и исследовать экстремумы. Например, так обстоит дело в задачах линейного программирования (см. п. 2, раздел 3.1).

3. Теория одноресурсной фирмы. Предположим, фирма выпускает один товар и его количество обозначим y . Используется только один ресурс. Фирма полностью характеризуется своей производственной функцией $y = F(x)$ — зависимостью объема выпускаемого товара от объема затраченного ресурса x .

В дальнейшем будем считать, что производственная функция имеет необходимые производные.

Предполагается, что производственная функция удовлетворяет двум аксиомам.

Аксиома 1. Хотя бы на части области определения производной функции, называемой *экономической областью* E , эта функция неубывающая, т.е. увеличение объема перерабатываемого ресурса не приводит к уменьшению выпуска. Таким образом, если a, b — две

точки этой области, то $a \leq b$ влечет за собой неравенство $F(a) \leq F(b)$. Следовательно, в этой области производная $F'(x)$ неотрицательна. Она называется *предельным продуктом*.

Аксиома 2. Утверждается, что существует выпуклое подмножество S экономической области, для которой подмножества $\{a \in S; F(a) \geq c\}$ также выпукло для всех c . В этом подмножестве вторая производная неположительна.

Остановимся на экономическом содержании этих двух аксиом.

Первая аксиома утверждает, что производственная функция не какая-то совершенно абстрактная функция, придуманная теоретиком-математиком. Она, пусть и не на всей своей области определения, а только лишь на ее части отражает экономически важное, бесспорное и в то же время тривиальное утверждение: в мало-мальски разумной экономике увеличение затрат не может привести к уменьшению выпуска.

Из второй аксиомы поясним только экономический смысл требования неположительности второй производной. Это свойство называется в экономике *законом убывающей отдачи* (*убывающей доходности*): по мере увеличения объема затраченного ресурса с некоторого момента (при входе в область $S!$) начинает уменьшаться предельный продукт. Классическим примером этого закона является добавление все большего и большего количества труда в производство зерна на фиксированном участке земли.

В дальнейшем подразумевается, что производственная функция на всей своей области определения удовлетворяет обоим аксиомам.

Вернемся к рассмотрению действий фирмы.

Пусть p — цена единицы ресурса и v — цена единицы выпускаемого товара. Следовательно, прибыль P , являющаяся в итоге функцией x (и цен, но они считаются постоянными), есть $P(x) = vF(x) - px$. Следовательно, приходим к задаче фирмы:

$$\begin{aligned} P(x) &\rightarrow \max, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Приравнивая производную функции $P(x)$ к нулю, получим:

$$F'(x) = p/v. \quad (2)$$

Очевидно, что объем перерабатываемого ресурса положителен и, следовательно, точка, даваемая соотношением (2), оказывается внутренней, т.е. точкой экстремума, и поскольку еще предполагается неположительность второй производной, то это точка максимума.

Итак, при естественных предположениях на производственную функцию (эти предположения выполняются для производителя со здравым смыслом и в разумной экономике) соотношение (2) дает

решение задачи фирмы, т.е. определяет объем перерабатываемого ресурса, в результате чего получается выпуск, дающий максимальную прибыль. Точку a^* , даваемую соотношением (2), назовем *оптимальным решением* фирмы.

Остановимся на экономическом смысле соотношения (2). Напомним, что $F'(x)$ называется предельным продуктом, а $vF'(x)$ — это стоимость предельного продукта, дополнительно полученного из единицы ресурса. Однако стоимость единицы ресурса равна p , т.е. получилось равновесие: можно вовлечь в производство дополнительно единицу ресурса, потратив на ее закупку p , но в результате выигрыша не будет, так как получим после переработки и реализации произведенного товара столько же денег, сколько затратили на покупку единицы ресурса. Итак, оптимальная точка, даваемая соотношением (2), является точкой равновесия — уже невозможно выжать из товаров-ресурсов больше, чем затрачено на их покупку.

Очевидно, наращивание выпуска фирмы происходило постепенно: сначала стоимость предельного продукта была больше покупной цены потребных для его производства ресурсов. Наращивание объема производства идет до тех пор, пока не начнет выполняться соотношение (2): равенство стоимости предельного продукта и покупной цены потребного для его производства ресурса.

При определенных условиях, наложенных на производственную функцию (см. аксиомы 1, 2 настоящего пункта), оптимальное решение задачи фирмы, даваемое соотношением (2), единственно для всех p и v .

Итак, в задаче (1) решение a^* единственно для p и v . Таким образом, получается функция $a^* = a^*(p, v)$, называемая *спросом на ресурс*. Что содержательно означает эта функция?

Если сложились цена p на ресурс и цена v на выпускаемый товар, то данная фирма (характеризующаяся данной производственной функцией) определяет объем перерабатываемого ресурса по функции $a(p, v)$ и будет закупать ресурс в этом объеме на рынке, т.е. это есть функция спроса со стороны фирмы на ресурс. А дальше, уже зная объем перерабатываемого ресурса, подставляя этот объем в производственную функцию, получим объем выпускаемого товара как функцию цен. Последняя функция называется *функцией предложения продукции*.

Пример 2. Объем добычи щебня y (т/ч) зависит от количества вложенного труда x (чел./ч) так: $y = 6\sqrt{x}$. Цена щебня 40 руб./т, зарплата рабочего 30 руб./ч. Кроме зарплаты, другие издержки не учитываются. Найдите оптимальное количество вложенного труда (рабочих).

Решение. При числе рабочих x прибыль равна $P(x) = 40 \cdot 6\sqrt{x} - 30x$. Найдём ее максимум. Производная $P'(x) = 240/(2\sqrt{x}) - 30$, откуда $x = 16$.

При этом значении 2-я производная $P''(16) < 0$, так что это действительно максимум.

Можно прямо воспользоваться соотношением (2). Получаем $40/(2\sqrt{x}) = 30$, откуда $x = 16$.

4. Прибыль фирмы и объем поступления налогов государству при данной налоговой ставке. Пусть цена на продукцию $v(y) = a - by$, т.е. линейно падает с увеличением объема предъявления готовой продукции на рынке, а затраты I зависят от объема продукции y следующим образом: $I(y) = cy^2 + dy + e$, где a, b, c, d, e — некоторые положительные константы. Пусть налог является акцизом со ставкой t , т.е. с каждой проданной единицы товара платится налог t , и вся налоговая сумма равна $G = ty$.

Итак, фирма получает прибыль $P(y) = y(a - by) - cy^2 - dy - e - ty$. Желая ее максимизировать, фирма ищет оптимальный объем производства. Значит, $P'(y) = 0$, откуда $y^* = (a - d - t)/(2(b + c))$, при этом $P''(y^*) = -2b - 2c < 0$, т.е. y^* действительно точка максимума. Поскольку $t > 0$, видно, что такая налоговая система приводит к снижению оптимального выпуска продукции.

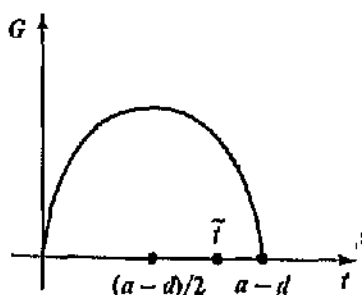


Рис. 2

Для прогнозирования действий правительства по установлению налоговой ставки t вычислим налоговый доход правительства (государства): $G = ty = t(a - d - t)/(2(b + c))$, т.е. в рассматриваемом случае кривая доходов правительства представляет параболу, ветви которой направлены вниз (рис. 2). Максимум достигается при $t^* = (a - d)/2$ и равен $G^* = (a - d)^2/(8(b + c))$, а оптимальный выпуск

продукции при этом значении t^* равен $y_1 = (a - d)/(4(b + c))$ и прибыль фирмы равна $P(y_1) = (a - d)^2/(16(b + c)) - e$. Вообще же, прибыль фирмы при налоговой ставке t равна $P(y^*(t)) = (a - d - t)^2/(4(b + c)) - e$, откуда следует, что с ростом t прибыль уменьшается (если $0 \leq t \leq (a - d)$) и видно, что существует область значений налоговой ставки (а именно, при $t \geq \tilde{t} = a - d - \sqrt{4e(b + c)}$, при которой прибыль фирмы отрицательна, хотя доходы правительства положительны).

Это случилось потому, что в качестве критерия выбора объема выпуска был принят максимум прибыли, но не было оговорено, что этот максимум положителен. Если принять, что при $t \geq \tilde{t}$ выпуск продукции на самом деле станет равным нулю, то доход правитель-

ства при $t \geq \tilde{t}$ также станет равным нулю. Понятно поэтому, что уже вблизи $\tilde{t}$ происходит резкое сокращение деловой активности.

5. Экстремумы выпуклых и вогнутых функций.

Предложение. Пусть функция $f(x)$ выпуклая (вогнутая) на выпуклом множестве (интервале, сегменте и т.д.). Если функция имеет минимум (максимум) на этом множестве, то он является наименьшим (наибольшим) значением.

Доказательство. Ограничимся случаем выпуклой функции, заданной на отрезке $[a, b]$. Предположим, что c — точка минимума функции $f(x)$. Предположим, $f(c)$ — не наименьшее значение на (a, b) , т.е., что $f(d) < f(c)$ для некоторой точки $d \in [a, b]$. Для любого λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) точка $z_\lambda = \lambda d + (1 - \lambda)c \in [a, b]$, и в силу выпуклости функции $f(x)$ имеем: $f(z_\lambda) \leq \lambda f(d) + (1 - \lambda)f(c) < f(c)$. При $\lambda \rightarrow 0$ точка z_λ стремится к c . Следовательно, в любой окрестности точки c имеются точки с меньшим значением, так что c — не точка минимума. Полученное противоречие оканчивает доказательство.

Из всего этого вытекает простой алгоритм нахождения минимума выпуклой функции: проходим интервал $[a, b]$ с шагом h . Сначала значения функции убывают. Как только они перестают убывать, точка минимума найдена — она расположена между данным значением и предыдущим.

Пример 3. Функция $y = x^3 - 100x + 2400$ выпукла на $[0, 100]$. Проходим интервал $(0, 100)$ с шагом 1. Имеем $y(1) = 2301, y(2) = 2204, \dots, y(49) = -99, y(50) = -100, y(51) = -99$. Стоп! Значения функции перестали убывать. Значит, минимум где-то между 50 и 51. Если надо найти минимум точнее, следует пройти отрезок $[50, 51]$ с меньшим шагом, и т.д.

ЗАДАЧИ

1. К реке шириной a м построен под прямым углом канал шириной b м. Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал?

2. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости плавание судна будет наиболее экономичным?

3. В небольшой теплице ежедневно снимаемый урожай огурцов y кг зависит от числа работников x : $y = 4\sqrt{x} + 4 \ln x$. Найдите оптимальное число работников, если дневная зарплата работника равна цене 2 кг огурцов.

4. Найдите функцию спроса на ресурс и функцию предложения продукции для фирмы с производственной функцией $y = \nu \ln(x + 1)$, где ν — цена единицы продукции, p — цена единицы ресурса и $p < \nu$.

5. Скоропортящийся продукт — мандарины — привозят в магазин «Овощи-фрукты» на машине. Накладные расходы в расчете на одну поездку равны 50 дол. Ежедневно магазин продает 2 т мандаринов. Издержки хранения составляют 20 центов с килограмма мандаринов за сутки. По формуле Уилсона рассчитайте оптимальный размер партии мандаринов, найдите периодичность завоза их в магазин, среднесуточные издержки. Подсчитайте среднесуточные издержки при размерах партии 2 т и 500 кг.

6.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

1. Возрастание и убывание функций.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда:

1) если $f'(x) > 0$ всюду на этом интервале, то функция возрастает на нем;

2) если $f'(x) < 0$ всюду на этом интервале, то функция убывает;

3) если $f'(x) = 0$ всюду на этом интервале, то функция постоянна на этом интервале.

Доказательство. Возьмем на данном интервале произвольные точки $c < d$ и применим формулу Лагранжа (см. п. 1, раздел 5.2) для функции $f(x)$ на отрезке $[c, d]$: $f(d) - f(c) = f'(e)(d - c)$, где e — некоторая точка на отрезке $[c, d]$. Так как $c < d$, то знак разности $f(d) - f(c)$ полностью определяется знаком производной $f'(e)$.

Если $f'(x)$ всюду положительна, то и $f'(e) > 0$. Отсюда $f(d) > f(c)$, т.е. $f(x)$ возрастает на интервале (a, b) . Если $f'(x)$ всюду отрицательна, то и $f'(e) < 0$. Отсюда $f(d) < f(c)$, т.е. $f(x)$ убывает на интервале (a, b) .

Наконец, если производная всюду равна нулю, то и $f'(e) = 0$ и, следовательно, $f(d) = f(c)$ при любых $d, c \in (a, b)$, т.е. постоянна на интервале (a, b) .

2. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым на интервале (a, b) (вогнутым на интервале (b, c))*, если все точки графика расположены выше (ниже) любой его касательной на этом интервале (рис. 1).

Теорема 1. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале и во всех его точках $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), то ее график *выпукл (вогнут) на этом интервале*.

Точкой перегиба графика функции называется точка этого графика, которая отделяет выпуклую его часть от вогнутой (на рис. 1 точкой перегиба является точка b).

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки b и дважды дифференцируема в ней всюду, кроме, быть может, самой точки b . Тогда, если при переходе через точку b 2-я производная меняет знак, то точка b есть точка перегиба графика функции.

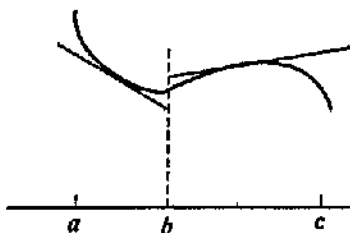


Рис.1

Доказательство. Если при переходе через точку b знак 2-й производной меняется с плюса на минус, то при этом происходит смена выпуклого участка графика функции на вогнутый; если же при переходе через точку b знак 2-й производной меняется с минуса на плюс, то при этом происходит смена вогнутого участка графика функции на выпуклый. В любом случае точка графика $(b, f(b))$ отделяет выпуклый и вогнутый участки графика функции, т.е. является точкой перегиба.

3. План исследования функции и построения ее графика. Содержание плана:

- 1) найти область определения функции;
- 2) определить, является ли функция периодической, четной или нечетной;
- 3) найти точки разрыва функции (и провести их классификацию, если требуется);
- 4) найти асимптоты графика функции или убедиться в их отсутствии;
- 5) найти точки пересечения графика функции с осью абсцисс, которые вместе с точками разрыва разбивают область определения функции на интервалы знакопостоянства;
- 6) найти производную функции, найти интервалы возрастания и убывания функции, найти экстремумы;
- 7) найти производную второго порядка, интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба;
- 8) найти значения функции или ее пределы в граничных точках области определения функции;
- 9) используя результаты исследования, построить график функции.

Пример 1. График функции $y = a/(1 + ce^{-dx})$ называется *логистической кривой*. В экономике его используют для определения тенденции роста производства предметов потребления. Пусть $a = 6$, $c = 2$ и $d = 1$, тогда $y = 6/(1 + 2e^{-x})$. Проведем исследование этой функции и построим ее график:

- 1) область определения функции: вся числовая прямая;
- 2) функция общего вида;
- 3) нет точек разрыва;

4) вертикальных асимптот нет, но есть горизонтальные: $k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y/x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (6/((1 + 2e^{-x})x)) = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (6/(1 + 2e^{-x})) = 6; \quad k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y/x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (6/((1 + 2e^{-x})x)) = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (6/(1 + 2e^{-x})) = 0, \text{ т.е. имеются две горизонтальные асимптоты: } y = 6 \text{ — правосторонняя и } y = 0 \text{ — левосторонняя;}$$

5) нет точек пересечения графика с осью Ox , функция положительна всюду;

6) производная $y' = 12e^{-x}/(1 + 2e^{-x})^2 > 0$ — всюду положительная, значит, функция всюду возрастает и не имеет экстремумов;

7) 2-я производная $y'' = 12e^{-x}(2e^{-x} - 1)/(1 + 2e^{-x})^3$ равна нулю при $x = \ln 2$. Точка $A(\ln 2, 3)$ есть точка перегиба, так как 2-я производная меняет знак при переходе через $\ln 2$;

$$8) \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 6;$$

9) строим график функции (рис. 2).

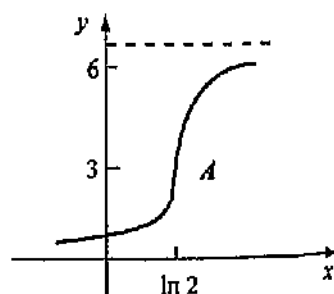


Рис. 2

4. Нахождение нулей функции, приближенное решение уравнений. Число c называется *корнем уравнения* $f(x) = 0$, если равенство $f(c) = 0$ является верным. С другой стороны, значение аргумента, при котором функция $f(x)$ равна нулю, называется *нулем функции*. Таким образом, нули функции $f(x)$ — это корни уравнения $f(x) = 0$. Нули функции — это точки пересечения ее графика с осью абсцисс, так что их нахождение нужно при построении графиков. Рассмотрим два способа нахождения изолированных корней уравнения (корень c называется *изолированным* на этом отрезке, если других корней на этом отрезке нет и функция имеет на концах отрезка значения разных знаков).

Метод хорд. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Составим уравнение хорды AB , соединяющей точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$: $(y - f(a))/(f(b) - f(a)) = (x - a)/(b - a)$. В качестве приближенного решения уравнения $f(x) = 0$ принимается точка x_1 , в которой хорда AB пересекает ось Ox (рис. 3). Подставив в уравнение хорды $x = x_1$,

$y = 0$ и решив его относительно x , получим: $c \approx x_1 = a - f(a)(b - a)/(f(b) - f(a))$.

Метод касательных (Ньютона). Пусть $f''(x)$ не меняет знака на отрезке $[a, b]$. Составим уравнение касательной к графику функции в точке $B(b, f(b))$, в которой выполняется условие $f''(b)/f'(b) > 0$ (рис. 4): $y = f(b) + (x - b)f'(b)$. В качестве приближенного решения уравнения $f(x) = 0$ принимается точка x_1 , в которой касательная пересекает ось Ox . Подставив в уравнение касательной $x = x_1$, $y = 0$ и решив его относительно x , получим: $c \approx x_1 = b - f(b)/f'(b)$.

Для нахождения более точного решения уравнения в любом из обоих методов надо повторить выкладки, взяв в качестве отрезка $[a, x_1]$ вместо $[a, b]$.

Пример 2. Найдём методом касательных приближенное решение уравнения $x + e^x = 0$.

Пусть $f(x) = x + e^x$, тогда убеждаемся, что $f(-1) = -1 + e^{-1} < 0$, $f(0) = 1 > 0$. Поскольку $f'(x) = 1 + e^x > 0$ всюду, в том числе и на отрезке $[-1, 0]$, то на этом отрезке есть изолированный корень. Поскольку $f''(x) = e^x > 0$, то применим метод касательных. Так как $f''(0)/f'(0) > 0$, то из описанного выше получаем: $x_1 = -1/2$. Сделаем еще одну итерацию. Убеждаемся в том, что за точку b можно взять $-1/2$. Получаем 2-е приближение: $x_2 \approx -0,56$ (с точностью до 5-го знака после запятой корень равен $-0,56715$).

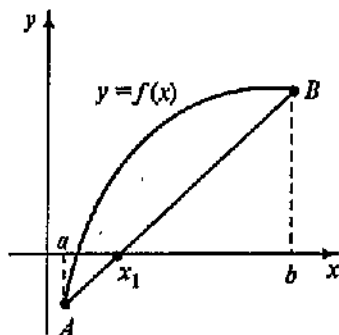


Рис. 3

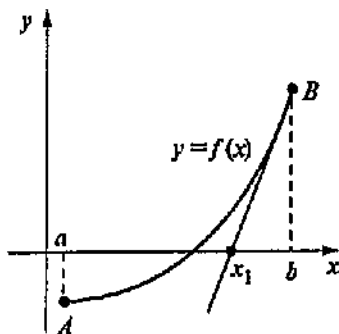


Рис. 4

ЗАДАЧИ

1. Постройте примерный график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей следующим условиям: $f(1) = 0$, $f'(1) = 1/\sqrt{3}$, $f(2) = 1$, $f'(2) = \sqrt{3}$.

Решение. Ставим на координатной плоскости точку $M(1, 0)$ — она на будущем графике. Проводим через точку M прямую линию под углом 30° и через точку $N(2, 1)$ — прямую линию под углом 60° — это касательные к будущему графику. Далее проводим плавную кривую, удовлетворяющую указанным условиям. Конечно, существует бесчисленное множество функций, удовлетворяющих указанным условиям.

2. Вернитесь еще раз к формуле Уилсона (см. п. 2, раздел 6.1). Зависимости от объема партии Q средних за единицу времени накладных расходов, издержек хранения и суммарных издержек выражаются соответственно формулами: KM/Q , $hQ/2$ и $KM/Q + hQ/2$. Постройте в одной системе координат графики всех этих функций, убедитесь в выполнении критерия оптимальности.

3. Придерживаясь плана исследования функции (см. п. 3, раздел 5.2), постройте графики следующих функций:

а) $y = (x - 1)/(x + 1)^2$; б) $y = x + e^{-x}$.

ЧАСТЬ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ С ЭКОНОМИЧЕСКИМИ ПРИЛОЖЕНИЯМИ

Тема 7.

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

7.1. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Определение функции многих переменных. Некоторые конкретные функции многих переменных хорошо знакомы.

Приведем несколько простых примеров.

Пример 1.

- объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$, где a, b, c — его длина, ширина и высота, т.е. объем прямоугольного параллелепипеда есть функция трех его измерений;
- по формуле Герона площадь треугольника $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c — длины трех его сторон, а $p = (a + b + c)/2$ — полупериметр, т.е. площадь треугольника есть функция трех аргументов — длин трех его сторон;
- сила гравитационного притяжения между двумя телами $F = \gamma m M / R^2$, где m, M — массы тел, R — расстояние между ними и γ — гравитационная постоянная.

Все это — примеры функций трех независимых аргументов или переменных. *Независимыми* аргументы называются потому, что значение, принятое одним из них, не определяет значений, которые могут принять другие аргументы.

Общее понятие функции было рассмотрено в п. 1 раздела 4.2 части 1. Кратко повторим основное.

Пусть даны два множества X и Y . Пусть каким-то способом f каждому элементу x множества X поставлен в соответствие один элемент $y = f(x) \in Y$. Тогда соответствие f называется *функцией* с областью определения $D(f) = X$ и областью значений $R(f) \subset Y$. При этом x называется *независимым переменным*, или *аргументом функции*, а $y = f(x)$ — *значением функции*, или *зависимым переменным*.

Множество пар $\{(x, y): x \in D(f)\}$ называется *графиком функции* f .

Определим теперь, что такое функция многих переменных. Весьма часто элементы области определения функции сами могут

иметь сложную структуру. Пусть имеется несколько множеств $X_1, \dots, X_n$. Пусть каким-то способом f набору $(x_1, \dots, x_n)$, где $x_i \in X_i$, поставлен в соответствие один элемент $y = f(x) \in Y$. Тогда соответствие f называется *функцией n переменных*, область определения $D(f)$ этой функции состоит из всех наборов-векторов $(x_1, \dots, x_n)$, на которых она определена. Компоненты наборов называются *независимыми переменными* или *аргументами функции*.

Пример 2 (функций многих переменных):

- а) предприятие производит n видов продукции, которые реализует по ценам $p_1, \dots, p_n$; при объемах реализации $x_1, \dots, x_n$ выручка $W = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$;
- б) определитель $\Delta(A)$ квадратной матрицы размера 2 есть функция всех

четырех элементов этой матрицы; пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тогда

$$\Delta(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

- в) квартирная плата зависит от метража жилой или всей площади, от числа жильцов, от тарифов на электричество, газ, воду холодную и горячую, от льгот, которые имеют жильцы, но если для двух квартир в доме все эти показатели одинаковы, то и плата одна и та же; значит, размер квартирной платы есть функция от этих показателей;
- г) налог, который должна заплатить фирма, рассчитывается по специальной методике, но если у двух фирмы показатели одинаковы, то и налог должен быть одинаковым; значит, величина налога есть функция от этих показателей.

2. Способы задания функции многих переменных. Как и функции одной переменной, функции многих переменных можно задавать аналитически, при помощи таблиц, при помощи графика, при помощи некоторого алгоритма (например, компьютерной программы — см. далее пример б).

При аналитическом способе задания функции ее значение определяется формулой от аргументов функции. Функции из примера 1 и из подп. «а», «б» примера 2 были заданы именно так; а функции из подп. «в», «г» примера 2 при желании тоже могли бы быть заданы формулой от соответствующих показателей.

Табличный способ для задания функций многих переменных применяется весьма часто. Например, он иногда необходим в сложных расчетах на ЭВМ. Однако многие, наверное, и не подозревают, что прейскурант обувной или автомастерской частенько есть табличный способ задания стоимости ремонта в зависимости от выполненных работ. Перечень этих работ — это область определения, а стоимость — значение функции.

Пример 3. В мастерской «Шиномонтаж» висит таблица стоимости работ:

Снятие покрышки	6000 руб.
Проверка камеры	1000 руб.
Вулканизация камеры	5000 руб.
Надевание покрышки	8000 руб.
Балансировка колеса	12 000 руб.

Пусть n_i означает число работ i -го вида, $i = 1, \dots, 5$, тогда стоимость всей работы для клиента подсчитывается по формуле: $W = 6000n_1 + 1000n_2 + 5000n_3 + 8000n_4 + 12\,000n_5$. Например, клиент привез 5 новых покрышек и хочет сменить все старые покрышки, камеры при этом хочет оставить старые. Тогда $n_1 = 5$, $n_2 = n_3 = 0$, $n_4 = 5$, $n_5 = 5$, и суммарная стоимость работ равна $(6000 + 8000 + 12\,000) \times 5 = 130\,000$ руб.

Конечно, никакой «науки» в этом примере нет, и работник мастерской прекрасно справляется с получением денег от клиентов и без знания, что его прейскурант есть табличный способ задания стоимости ремонта в зависимости от выполненных работ.

Графический способ задания функции более чем двух переменных почти не применяется из-за трудностей изображения графика такой функции. В случае же функции f двух переменных их можно обозначить через x и y , значение функции через z , т.е. $z = f(x, y)$. Графиком такой функции будет поверхность в пространстве трех измерений, состоящая из точек $(x, y, f(x, y))$, где $(x, y) \in D(f)$ — области определения функции f .

Пример 4. Например, для функции $f = \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}$ такой поверхностью является полусфера над началом координат радиусом 4 (рис. 1).

Для образного представления функции многих переменных используются линии заданного уровня. Пусть $y = f(x_1, \dots, x_n)$ — функция n переменных и c — какое-нибудь число, тогда множество $U_c = \{X = (x_1, \dots, x_n) : f(X) = c\}$ называется *линией уровня* c . Конечно, если $n > 2$, то это не линия, а нечто большее, которое может быть названо *поверхностью уровня* c (при $n = 3$ это настоящая поверхность в пространстве трех переменных). Из определения функции следует, что различные линии уровня не пересекаются.

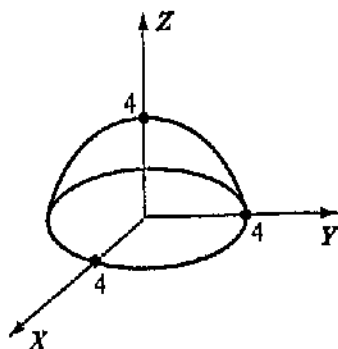


Рис. 1

Пример 5. Пусть $z = \sqrt{x_1 x_2}$. Ее линия уровня c есть $U_c = \{(x_1, x_2) : x_1 x_2 = c, x_1, x_2 > 0 \text{ или } x_1 x_2 = c, x_1, x_2 < 0\}$. Легко видеть, что линии уровня —

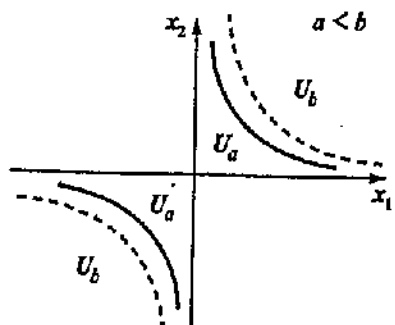


Рис. 2

это «веточки» гиперболы в 1-м и 3-м квадрантах. При увеличении c линии уровня отодвигаются от начала координат (рис. 2).

Компьютерный способ задания функции проиллюстрируем таким примером.

Пример 6. Рассмотрим линейную задачу оптимального планирования: найти такой план производства X , который бы был допустимым и обеспечивал наибольшую прибыль из всех допустимых планов:

$$CX \rightarrow \max, AX \leq B, X \geq 0.$$

Напомним, что здесь A — матрица норм расхода, C — вектор-строка удельных прибылей, B — вектор-столбец запасов ресурсов, X — вектор-столбец объемов выпускаемой продукции (об этой задаче см. п. 1 раздела 3.1).

Решением этой задачи является оптимальный план X^* и максимальная прибыль $W^* = CX^*$. Заметим теперь, что в конечном итоге максимальная прибыль W^* есть функция C, A, B , но значение этой функции можно найти (кроме совсем простых задач) лишь с помощью подходящего алгоритма, например с помощью симплекс-метода.

3. Некоторые многомерные функции, используемые в экономике. Одномерные аналоги этих функций уже рассматривались в п. 2 раздела 4.2.

Многомерная функция полезности $u(X) = u(x_1, \dots, x_n)$ — субъективная числовая оценка данным индивидом полезности u набора $X = (x_1, \dots, x_n)$ товаров. Она неубывающая, т.е. $u(X_1) \leq u(X_2)$, если $X_1 \leq X_2$. Типичная функция полезности двух переменных $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} \sqrt{x_2}$.

Функция издержек $I(Y) = I(y_1, \dots, y_n)$ — зависимость издержек в стоимостной форме от объемов $Y = (y_1, \dots, y_n)$ выпускаемой продукции. Она также неубывающая.

Многофакторная производственная функция $y = F(X) = F(x_1, \dots, x_n)$ — зависимость объема или стоимости y выпускаемой продукции от объема $X = (x_1, \dots, x_n)$ перерабатываемых ресурсов. Она также неубывающая.

Наиболее известной производственной функцией является функция Кобба—Дугласа $y = AK^\alpha L^\beta$, где A, α, β — неотрицательные константы и $\alpha + \beta \leq 1$, а K — объем фондов либо в стоимостном, либо в натуральном выражении (скажем, число станков); L — объем трудовых ресурсов — число рабочих, число человеко-дней и т.п. И, наконец, y — выпуск продукции в стоимостном или натуральном выражении.

Приведем еще два примера функций многих переменных с экономическим содержанием.

Пример 7. Предприятие имеет участок производства и склад. Склад обеспечивает ритмичность работы — если продукцию не удастся сбыть сразу, то ее можно хранить на складе. Наличие склада приводит к издержкам хранения. В простейшем случае эти издержки за единицу времени пропорциональны числу изделий I , хранящихся на складе, т.е. они равны hi , где h — издержки хранения одного изделия в течение одной единицы времени. Издержки производства за единицу времени в простейшем случае также равны ci , где i — число произведенных за единицу времени изделий, а c — себестоимость производства одного изделия. К этим издержкам добавляются еще накладные расходы K — это расходы в единицу времени на поддержание рабочего состояния предприятия, они практически не зависят от интенсивности работы и включают расходы на охрану, дежурных рабочих и т.д. Все издержки за единицу времени получаются равными $K + ci + hi$.

Пример 8. Пусть M — это общее количество денег, V — скорость их обращения (сколько раз каждый рубль, доллар участвуют в расчетах в среднем за год), Y — национальный продукт или доход (*национальный продукт* — это все готовые товары и услуги, произведенные в экономической системе в стоимостном выражении; *национальный доход* — это все выплаты, полученные домашними хозяйствами: заработная плата, рента, прибыль; национальный продукт и национальный доход численно равны). Пусть P — это уровень цен (среднее взвешенное значение цен готовых товаров и услуг, выраженное относительно базового показателя, принятого за единицу). Связывая все эти величины, получим уравнение денежного обращения — основное уравнение классической количественной теории денег, так называемое *уравнение обмена Фишера*: $MV = PY$ (оно было введено в разделе 4.2). Любая из переменных M, V, P, Y может рассматриваться как функция трех остальных.

Например, $P = MV/Y$ и видим, что если правительство (Госбанк) увеличит число денег M в обращении в 2 раза (т.е. просто деньги напечатают), то и цены возрастут в 2 раза (при условии, что остальные величины, т.е. V, Y , останутся неизменными). Такие действия чаще всего и есть причина инфляции.

ЗАДАЧИ

1. Является ли объем тела функцией площади его поверхности: а) у шара; б) у прямого кругового цилиндра?

Ответ: а) да; б) нет (потому что существуют цилиндры разного объема, но с одной площадью поверхности).

2. Вы прочли в газете, что в 1997 г. официальный курс 1 дол. = 5810 руб. и 1 нем. марка = 3210 руб. Согласно этому вы рассчитываете получить за 1 дол. = 5810/3210 $\approx$ 1,8099 нем. марки. Сколько на самом деле вы получите марок за доллар в обменном пункте?

Решение. Рассчитанный выше есть официальный, а лучше сказать, теоретический кросс-курс доллара по отношению к немецкой

марке. В реальности в любом обменном пункте висит таблица курсов покупки и продажи различных валют. Последовательность (мысленных) действий работника обменного пункта такова: он покупает у вас доллары за рубли и потом на эту рублевую сумму продает вам немецкие марки. Пусть D, d — курсы продажи (вам) и покупки (у вас) доллара, т.е., сдав D руб., вы получите 1 дол., а сдав 1 дол., вы получите d руб. (конечно, $D > d$). Аналогично — N, n относительно немецкой марки. Когда вы сдадите 1 дол., работник пункта отнесёт на ваш счет сумму в d руб., за которые начислит вам d/N марок. Это и есть кросс-курс доллара по отношению к марке.

Так, если $D, d = 5830, 5800$, а $N, n = 3230, 3200$, то за 1 дол. вы получите $5800/3230 = 1,7956$ марки. При обмене 1000 дол. потеря составит $1809,9 - 1,7956 = 14,3$ нем. марки.

Итак, *кросс-курс* есть функция курса покупки у вас сдаваемой валюты и курса продажи вам нужной валюты.

Найдите, сколько долларов получите в этом обменном пункте за 1000 нем. марок?

3. Предположим, что производство имеет линейную структуру (см. п. 2 раздела 1.2): A — матрица норм расхода, P — вектор-строка цен на ресурсы, V — вектор-строка цен на выпускаемую продукцию, X — вектор-столбец объемов выпускаемой продукции.

Тогда $I(X) = PAX$ — функция издержек, $W(X) = VX - PAX$ — функция прибыли от выпускаемой продукции объемов X . Какой смысл имеет вектор PA ?

4. Линии уровня функции полезности $u(X)$ называются *кривыми безразличия*. Ведь если $u(X_1) = u(X_2)$, то индивиду безразлично, каким набором товаров (X_1 или X_2) обладать — они для него имеют одинаковую полезность.

Найдите несколько кривых безразличия для следующих функций полезности: а) $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$; б) $u(x_1, x_2) = \min \{x_1, 2x_2\}$; в) $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$.

5. Линии уровня производственной функции называются *изоквантами*.

Найдите несколько изоквант производственной функции типа функции Кобба–Дугласа.

6. Для предприятия, издержки которого имеют структуру, как в примере 7, данные таковы: $K = 20$, $c = 4$, $h = 1$.

Задайте издержки таблицей с двумя входами: u и i .

7.2. МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Иерархия пространств. Немецкий математик Г. Кантор определял *множество* как «объединение в одно целое объектов, хорошо

различимых нашей интуицией или мыслью». Понятие множества не предполагает никакой более богатой структуры.

Но уже множество целых чисел не просто множество — в нем можно складывать его элементы и вычитать их друг из друга.

Множество всех чисел несет еще более богатую структуру — в нем определена операция предельного перехода, т.е. указано, какие последовательности чисел сходятся к тому или иному числу.

В п. 3 раздела 1.1 рассматривалось числовое (или арифметическое) линейное пространство R^n размерности n . Элементами его являются n -мерные векторы-строки, т.е. упорядоченные наборы из n чисел. Заметим, что это не просто множество — R^n несет определенную структуру. Так, его элементы можно складывать и умножать на числа, и эти операции очень похожи на соответствующие операции с числами (см. п. 2 раздела 1.1).

Ниже приводятся примеры множеств с богатой структурой: нормированных пространств, евклидовых и т.п.

2. Евклидово пространство. Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ — два вектора из R^n , тогда число $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ называется *скалярным произведением векторов X , Y* и обозначается $X \cdot Y$ или XY .

Напомним основные свойства скалярного произведения:

- а) $XY = YX$;
- б) $X(Y + Z) = XY + XZ$ для любых векторов X, Y, Z ;
- в) $\lambda X \cdot Y = \lambda XY$ для любых векторов X, Y и любого числа λ .

Линейное пространство со скалярным умножением называется *евклидовым пространством*. Евклидово пространство несет еще более богатую структуру, чем просто линейное пространство. Так, в нем можно определить длину вектора и угол между векторами.

Длиной вектора X называется число $\sqrt{X^2}$, обозначается через $|X|$. Нетрудно доказать следующие свойства длины вектора:

- а) $|X| \geq 0$ и $|X| = 0$ тогда и только тогда, если $X = 0$;
- б) $|\lambda X| = |\lambda| |X|$ для любых вектора X и числа λ ;
- в) $|X + Y| \leq |X| + |Y|$ для любых векторов X, Y .

Угол φ между векторами X, Y определяется так: $\cos \varphi = XY / (|X| \cdot |Y|)$, так что $\varphi = \arccos (XY / (|X| \cdot |Y|))$.

Нетрудно видеть, что $X \cdot Y = |X| \cdot |Y| \cos \varphi$.

В пространстве R^n длину вектора $X = (x_1, \dots, x_n)$ можно задать аналитически — как функцию его компонент: по определению длины вектора имеем, что $|X| = \sqrt{X^2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Пример 1. Найти длины векторов и угол между ними: $X = (3, 4)$, $Y = (8, 6)$.

Имеем: $|X| = \sqrt{X^2} = 5$, $|Y| = \sqrt{Y^2} = 10$, $XY = 24 + 24 = 48$, следовательно, $\cos \varphi = XY/(|X| \cdot |Y|) = 48/50$, отсюда $\varphi \approx 17^\circ$.

Векторы называются *перпендикулярными*, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. косинус угла между ними равен нулю (вспомните, что косинус угла 90° равен нулю).

Пример 2. В пространстве R^2 найти множество векторов, чьи скалярные произведения с данным вектором $N = (n_1, n_2)$ равны d .

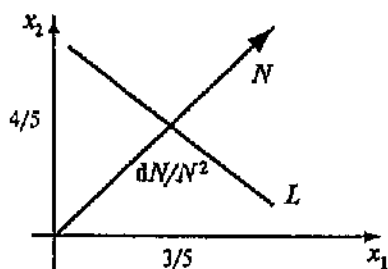


Рис. 1

Обозначим искомое множество через L , тогда $L = \{X: XN = d\}$. Если $X = (x_1, x_2)$, то $L = \{(x_1, x_2): n_1x_1 + n_2x_2 = d\}$. С геометрической точки зрения — это прямая линия, проходящая через точку dN/N^2 перпендикулярно вектору N (убедитесь в том, что точка dN/N^2 в самом деле принадлежит L).

Пусть, например, $N = (3, 4)$ и $d = 5$, тогда L есть прямая, проходящая через точку $(3/5, 4/5)$ перпендикулярно вектору N (рис. 1).

Промежуточным между просто линейным пространством и евклидовым является понятие *нормированного пространства*. Это линейное пространство, в котором каждому вектору X приписано число $\|X\|$, называемое его *нормой*, удовлетворяющее условиям:

- $\|X\| \geq 0$ и $\|X\| = 0$ тогда и только тогда, если $X = 0$;
- $\|\lambda X\| = |\lambda| \|X\|$ для любых вектора X и числа λ ;
- $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ для любых векторов X, Y .

Как видно, по этим условиям норма очень похожа на длину вектора в евклидовом пространстве.

Замечание. Основным для нас будет все-таки евклидово пространство; более того, числовое (или арифметическое) линейное пространство произвольной конечной размерности с имеющимся в нем скалярным умножением.

Однако многие понятия, которые будут рассмотрены, могут быть отнесены к произвольному евклидову пространству или даже просто нормированному, а то и к общему линейному пространству.

Рассмотрим несколько типичных множеств, которые можно определить в R^n (евклидовом, нормированном пространствах — см. замечание выше).

Гиперплоскость — это множество $G(X, d) = \{Y: YX = d\}$, где X — фиксированный произвольный элемент евклидова пространства, т.е. это множество векторов, чье скалярное произведение с данным вектором X равно константе d . Вектор X называется *нормальным векто-*

ром этой гиперплоскости. При различных d гиперплоскости $G(X, d)$ не пересекаются, поэтому их называют *параллельными*. Впрочем, при $n = 3$ это настоящие параллельные плоскости в пространстве трех переменных.

Полупространство — это множество $P(X) = \{Y: YX \geq 0\}$, где X — произвольный элемент евклидова пространства. Полупространство называется *замкнутым* или *открытым* — в зависимости от того, нестрогое или строгое неравенство в его определении (следовательно, выше дано определение замкнутого полупространства), оно соответственно включает в себя или нет граничную гиперплоскость $G(X, 0)$. Полупространство — это многомерный аналог: а) луча с начальной точкой или без нее — для $n = 1$; б) полуплоскости с граничной прямой или без нее — для $n = 2$; в) «настоящего» полупространства с граничной полуплоскостью или без нее — для $n = 3$ и т.д.

Шар $K(X, r)$ радиусом r с центром в точке X — это множество $\{Y: |Y - X| \leq r\}$. Это многомерный аналог: а) интервала в R длины $2r$, середина которого есть точка x ; б) круга в R^2 радиусом r с центром в точке (x_1, x_2) ; в) «настоящего» шара в R^3 радиусом r с центром в точке (x_1, x_2, x_3) и т.п. Шар называется *открытым*, если неравенство в его определении строгое, и *замкнутым*, если нестрогое. В одномерном случае — это соответственно *открытый интервал* и *замкнутый интервал*, который чаще называют *сегментом*. В двумерном случае — это открытый круг, т.е. без ограничивающей его окружности, и круг вместе с ограничивающей окружностью и т.д.

Прямая линия, проходящая через две точки X, Y в линейном пространстве, — это множество $L = \{X + \lambda(Y - X): \lambda \in R\}$. В R^n это множество можно задать и так: $L = \{Z: (z_1 - y_1)/(y_1 - x_1) = \dots = (z_n - y_n)/(y_n - x_n)\}$ (сравните с заданием прямой на плоскости и в пространстве в пп. 1, 4 раздела 2.1).

3. Топология евклидова пространства. Топология пространства — это ответ на вопрос о том, как оно устроено с точки зрения предельного перехода. Так вот, с этой точки зрения топология евклидова (нормированного) пространства E очень похожа на топологию пространства чисел — только модуль числа x заменяется длиной (нормой) вектора X , в силу чего ε -окрестность точки $A \in E$ — это множество $O_\varepsilon(A) = \{X: |X - A| < \varepsilon\}$, т.е. открытый шар радиусом ε с центром в точке A . Множество называется *открытым*, если вместе со всякой принадлежащей ему точкой оно содержит и некоторую окрестность этой точки. Дополнение к открытому множеству называется *замкнутым* множеством. Множество M называется *ограниченным*, если найдется такое число m , что $|X| \leq m$ для всех $X \in M$.

Вот определение предела последовательности элементов (X_n) произвольного евклидова пространства E (сравните с определением предела последовательности чисел в п. 3 раздела 4.1).

Определение 1. Элемент $A \in E$ называется *пределом последовательности* $(X_n) \subset E$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $K \in \mathbb{N}$, что $|X_n - A| < \varepsilon$ для любого $n > K$. Обозначение: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} (X_n)$.

А вот определения предела и непрерывности в точке числовой функции $f(X)$, определенной в евклидовом (нормированном) пространстве (сравните с аналогичными определениями в п. 3 раздела 4.2 и в п. 1 раздела 4.4).

Определение 2. Число a называется *пределом функции* $y = f(X)$ при X , стремящемся к A ($X \rightarrow A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(X) - a| < \varepsilon$ при $0 < |X - A| < \delta$. Это записывают так: $a = \lim_{X \rightarrow A} f(X)$.

Таким образом, запись $a = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} f(B + \Delta X)$ понимают так: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(B + \Delta X) - a| < \varepsilon$ при $0 < |\Delta X| < \delta$.

Определение 3. Функция $y = f(X)$ называется *непрерывной в точке* A , если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A)$.

Специально напомним, как определяется бесконечно малая величина в евклидовом (нормированном) пространстве. Пусть $\alpha(X)$ — функция, определенная в евклидовом пространстве, тогда величина α называется *бесконечно малой*, если $\lim_{X \rightarrow 0} \alpha(X) = 0$. Далее можно определить отношение между бесконечно малыми, т.е. когда они эквивалентны, когда одна более высокого порядка, чем другая, и т.п. (см. п. 2, раздел 4.3).

Пример 3. Убедимся, что функция $M(X) = \max |x_i|$, заданная в R^n , является бесконечно малой того же порядка, что и X . Действительно, $M(X) \leq |X| \leq n M(X)$, что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что предел последовательности векторов в пространстве R^n равен нулю тогда и только тогда, когда каждая компонента векторов этой последовательности стремится к нулю.

Основные свойства пределов и непрерывности, бесконечно малых величин и т.д. для функций одной переменной остаются справедливыми (с соответствующими поправками) и для функций многих переменных.

Все это позволит определить необходимые нам понятия дифференциального исчисления для числовых функций многих переменных совершенно аналогично тому, как это было сделано для функций одной переменной.

4. Свойства функций, заданных в евклидовом пространстве. Учитывая богатую структуру евклидова пространства, многие понятия, определенные для функций одной переменной (см. п. 4, раздел 4.2), почти без изменений переносят на функции многих переменных, заданных в евклидовом пространстве. Разумеется, существует определенное сходство и различие между функциями одной и многих переменных. Сходство заключается в том, что в функциях многих переменных нет ничего такого, чего уже не было бы в функциях одной переменной. Однако почти всегда соответствующее понятие для функции многих переменных оказывается более сложным, чем для функции одной переменной.

Так, функция одной переменной может быть четной, нечетной, возрастающей, убывающей, ограниченной и т.д. Как выглядят эти понятия для функций многих переменных? Например, когда функцию многих переменных можно назвать возрастающей или неубывающей?

Вспомним соответствующие определения для функции одной переменной (см. п. 4 раздела 4.2): функция $y(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве M , если из того, что $x_1, x_2 \in M$ и $x_1 < x_2$ вытекает, что $y_1 < y_2$ ($y_1 > y_2$); функция $y(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на множестве M , если из того, что $x_1, x_2 \in M$ и $x_1 \leq x_2$ вытекает, что $y_1 \leq y_2$ ($y_1 \geq y_2$).

Следовательно, прежде всего на наборах-векторах из исследуемого множества M должно быть определено отношение порядка. Это так, если, например, аргументы функции имеют числовую природу или есть элементы линейного пространства. И тогда определение возрастающей или неубывающей функции многих переменных можно было бы дать в точности так же, как и для функции одной переменной, а именно: функция $y(X)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве M , если из того, что $X_1, X_2 \in M$ и $X_1 < X_2$ вытекает, что $y_1 < y_2$ ($y_1 > y_2$); функция $y(X)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на множестве M , если из того, что $X_1, X_2 \in M$ и $X_1 \leq X_2$ вытекает, что $y_1 \leq y_2$ ($y_1 \geq y_2$).

Но неравенство $X_1 < X_2$ для векторов понимается как строгое неравенство для всех компонент, что является весьма ограничительным. По этой и другим причинам из двух определений комбинируют только одно: функция $y(X)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на множестве M , если из того, что $X_1, X_2 \in M$ и $X_1 \leq X_2$ вытекает, что $y_1 \leq y_2$ ($y_1 \geq y_2$).

При необходимости уточняют характер возрастания или убывания функции многих переменных.

Пример 4. Вспомним некоторые функции из примеров 1, 2 раздела 7.1:

- а) объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$, где a , b , c — его длина, ширина и высота, т.е. объем прямоугольного параллелепипеда есть функция трех его измерений;
- б) по формуле Герона площадь треугольника $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a , b , c — длины трех его сторон, а $p = (a+b+c)/2$ — полупериметр, т.е. площадь треугольника есть функция трех аргументов — длин трех его сторон;
- в) сила гравитационного притяжения между двумя телами $F = \gamma m M / R^2$, где m , M — массы тел, R — расстояние между ними и γ — гравитационная постоянная;
- г) предприятие производит n видов продукции, которые реализует по ценам $p_1, \dots, p_n$; при объемах реализации $x_1, \dots, x_n$ выручка $W = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$;
- д) определитель $\Delta(A)$ квадратной матрицы размера 2 есть функция всех

четырех элементов этой матрицы; пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тогда

$$\Delta(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

- е) квартирная плата зависит от метража жилой или всей площади, от числа жильцов, от тарифов на электричество, газ, воду холодную и горячую, от льгот, которые имеют жильцы, но если для двух квартир в доме все эти показатели одинаковы, то и плата одна и та же; значит, размер квартирной платы есть функция от этих показателей;
- ж) налог, который должна заплатить фирма, рассчитывается по специальной методике, но если у двух фирм показатели одинаковы, то и налог должен быть одинаковым; значит, размер налога есть функция от этих показателей.

Какие из этих функций возрастающие?

Ответ: только функции «а», «б», «г».

Функция f , область определения которой симметрична относительно нуля, называется *четной* (*нечетной*), если $f(-X) = f(X)$ ($f(-X) = -f(X)$) для любого $X \in D(f)$. Например, функция «длина вектора» является четной.

Функция f называется *ограниченной сверху* (*снизу*) на множестве M , если существует m такое, что $f(X) \leq m$ ($f(X) \geq m$) для любого $X \in M$. Функция, ограниченная и снизу, и сверху, называется *ограниченной на этом множестве*.

Функция f называется *выпуклой* (*вогнутой*) на выпуклом множестве M , если для любых $X, Y \in M$ и любого $0 \leq \lambda \leq 1$ верно, что $f(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda f(X) + (1-\lambda)f(Y)$ ($\geq \lambda f(X) + (1-\lambda)f(Y)$).

Из функции многих переменных можно получить «много» функций одной переменной.

Пусть $y = y(x_1, \dots, x_n)$ — функция n переменных. Фиксируем значения переменных $x_2^0, \dots, x_n^0$, а x_1 пусть изменяется. Тогда получим функцию одной переменной: $y_1 = y(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) = y_1(x_1)$. Теперь понятно, как понимать выражение «функция $y(x_1, \dots, x_n)$ возрастает по x_1 при $x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$ » — это говорится про функцию $y_1(x_1)$. Аналогичным образом нужно понимать и подобные утверждения о четности или нечетности функции по x_1 при $x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$ и т.п.

Пример 5. а) функция $z = x - y$ возрастает по x при любом y и убывает по y при любом x ; б) функция $z = x^2 y$ является четной по x при любом y и нечетной по y при любом x ; в) функция $z = (2 + y) \sin x$ — периодическая по x при любом y .

ЗАДАЧИ

1. Пусть A — произвольный элемент евклидова пространства. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} A/n = 0$.

2. Ограничено ли множество $\{(x, y): x^2 - y = 0\}$ в пространстве R^2 ?

3. Фиксируем какой-нибудь вектор A евклидова пространства E . Множество $L = \{\lambda A; \lambda \in R\}$ есть прямая в этом пространстве (см. п. 2). Убедитесь, что это множество замкнуто, потому что его дополнение E/L открыто. Ограничено ли это множество L ?

4. Докажите, что любая гиперплоскость (см. п. 2) есть замкнутое множество, потому что его дополнение открыто. Является ли гиперплоскость ограниченным множеством?

5. Что собой представляют линии уровня функции «длина вектора» (см. п. 2) в пространствах R^2, R^3 ? Как может быть названо множество $S = \{X: |X| = d\}$ в R^2, R^3 ?

6. Является ли функция «длина вектора» возрастающей, четной, периодической? Докажите, что эта функция непрерывна.

7. Для вектора $X = (x_1, \dots, x_n)$ положим $\|X\| = \max_i |x_i|$. Докажите, что эта функция удовлетворяет определению нормы (см. п. 1). Убедитесь в том, что эта норма эквивалентна «длине вектора», т.е. каждая окрестность нуля по одной норме содержит некоторую окрестность нуля по другой норме (см. также пример 3).

Тема 8.

ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

8.1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Частные производные. Чтобы избежать громоздких обозначений, ограничимся здесь функциями трех переменных. Случай большего числа переменных полностью аналогичен.

Итак, пусть числовая функция $u = f(x, y, z)$ определена в некоторой открытой области D . Возьмем некоторую точку $M(a, b, c)$ из этой области. Если значения переменных y, z оставить равными b, c соответственно, а x изменять, то u будет фактически функцией одной переменной x (по крайней мере, в некоторой окрестности точки a); поэтому можно поставить вопрос о наличии производной этой функции в точке a . Придадим x приращение Δx , тогда функция получит приращение $\Delta u = f(a + \Delta x, b, c) - f(a, b, c)$, которое называется частным приращением по x , поскольку оно вызвано изменением значения лишь одной переменной. По определению производной, она представляет собой предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u / \Delta x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(a + \Delta x, b, c) - f(a, b, c)) / \Delta x$. Эта производная называется *частной производной* функции $f(x, y, z)$ по x в точке (a, b, c) .

Частную производную обозначают $\partial u / \partial x$ или u'_x или $f'_x(a, b, c)$.

Аналогично, считая x, z равными a, c соответственно и изменяя y , можно рассматривать предел $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta u / \Delta y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (f(a, b + \Delta y, c) - f(a, b, c)) / \Delta y$, который называется *частной производной* функции $f(x, y, z)$ по y в точке (a, b, c) и обозначается $\partial u / \partial y$ или u'_y или $f'_y(a, b, c)$.

Точно так же определяется частная производная функции $f(x, y, z)$ по z в точке (a, b, c) ; она обозначается $\partial u / \partial z$ или u'_z или $f'_z(a, b, c)$.

Само же вычисление частной производной по существу не представляет ничего нового по сравнению с вычислением обычной производной. Просто при вычислении частной производной по какой-то переменной все остальные считаются константами.

Пример 1. Найдем частные производные функции $u = x^2y + 2z$. Имеем: $\partial u / \partial x = 2xy$; $\partial u / \partial y = x^2$; $\partial u / \partial z = 2$.

Если собрать все частные производные, то получим трехмерный вектор $(\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial u / \partial z)$. Он обозначается обычно ∇u и называется *градиентом*.

В общем случае функции n переменных этот вектор есть $\nabla u(x_1, \dots, x_n) = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n)$. Если вектор-набор аргументов обозна-

чить $X = (x_1, \dots, x_n)$, то иногда вводят обозначение du/dX , понимая под этим вектор-градиент $(du/dx_1, \dots, du/dx_n)$.

2. Частные производные 2-го и высших порядков. Частные производные являются функциями тех же аргументов, поэтому можно находить частные производные от них. Эти производные называются *частными производными 2-го порядка* от исходной функции.

Пример 2. Пусть u есть функция из примера 1, т.е. $u = x^2y + 2z$. В примере 1 уже были найдены частные производные: $du/dx = 2xy$; $du/du = x^2$; $du/dz = 2$. Найдем теперь частные производные 2-го порядка:

$$\begin{aligned} u''_{xx} &= (2xy)'_x = 2y; & u''_{xy} &= (2xy)'_y = 2x; & u''_{xz} &= (2xy)'_z = 0; \\ u''_{yx} &= (x)'_x = 2z; & u''_{yy} &= (x^2)'_y = 0; & u''_{yz} &= (x^2)'_z = 0; \\ u''_{zx} &= (2)'_x = 0; & u''_{zy} &= (2)'_y = 0; & u''_{zz} &= (2)'_z = 0. \end{aligned}$$

Производные, взятые последовательно по разным производным, называются *смешанными*. Как видно, смешанные производные $u''_{xy} = u''_{yx} = 2x$; $u''_{xz} = u''_{zx} = 0$; $u''_{yz} = u''_{zy} = 0$.

Это не случайно, смешанные производные действительно равны при некоторых условиях, налагаемых на функцию. Обычно для функций, используемых в экономике, эти условия выполняются.

Все основные правила нахождения производных 1-го и высших порядков для функции одной переменной (см. п. 3 раздела 5.1) остаются в силе и для нахождения частных производных функции многих переменных — например, правило нахождения производной сложной функции. Напомним его на примере.

Пример 3. Пусть $u = (2x + y^3)^2$. Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим: $u'_x = 2(2x + y^3) \cdot 2 = 4(2x + y^3) = 8x + 4y^3$; $u'_y = 2(2x + y^3) \cdot 3y^2 = 12xy^2 + 6y^5$; $u''_{xx} = (8x + 4y^3)'_x = 8$; $u''_{xy} = (8x + 4y^3)'_y = 12y^2$; $u''_{yx} = (12xy^2 + 6y^5)'_x = 12y^2$; $u''_{yy} = (12xy^2 + 6y^5)'_y = 24xy + 30y^4$ и т.д.

Другим примером может быть правило нахождения производной функции с параметром. Пусть функция $u = f(x, y, z)$, причем каждая из переменных x, y, z в свою очередь есть функция от переменной t : $x = a(t)$, $y = b(t)$, $z = c(t)$. Подставив выражения x, y, z через t в функцию f , убедимся, что u есть сложная функция от t : $u = f(a(t), b(t), c(t))$.

Как найти производную u'_t ? Конечно, ее можно найти по правилам нахождения производной функции одной переменной. Но можно доказать, что $u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t$ (при некоторых условиях на рассматриваемые функции). Конечно, надо видеть, что u'_x, u'_y, u'_z — это частные производные функции u по своим переменным x, y, z , а x'_t, y'_t, z'_t — это обычные производные функций $x = a(t)$, $y = b(t)$, $z = c(t)$ по переменной t .

Пример 4. Пусть $u = xy^2$ и $x = t, y = t$, тогда $u = t^3$ и $u' = 3t^2$. С другой стороны, используя частные производные, получим: $u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t = y^2 \cdot 1 + 2xy \cdot 1 = t^2 + 2t^2 = 3t^2$.

Иногда функция многих переменных задается неявно, путем какого-нибудь равенства — формулы со многими переменными. Например, пусть $F(x, y, z) = 0$ — выражение с тремя переменными, такое, что для всяких x, y найдется только одно такое z , что выполняется условие $F(x, y, z) = 0$. Следовательно, равенство $F(x, y, z) = 0$ определяет z как функцию от x, y , т.е. z есть функция двух переменных. Нахождение частных производных для такой функции покажем на примере.

Пример 5. Пусть $x^2y + z = 0$. Чтобы найти частную производную dz/dx , продифференцируем равенство по x , имея в виду, что y постоянно и z зависит от x . Получаем: $2xy + dz/dx = 0$, следовательно, $dz/dx = -2xy$.

В данном случае этот результат легко проверить. Действительно, z легко выразить в явном виде как функцию x, y : $z = -x^2y$. Значит, $dz/dx = -2xy$.

3. Экономический смысл частных производных. Рассмотрим в качестве примера производственную функцию Кобба—Дугласа (см. п. 3 раздела 7.1): $y = AK^\alpha L^\beta$, где A, α, β — неотрицательные константы и $\alpha + \beta \leq 1$; K — объем фондов либо в стоимостном выражении, либо в натуральном количестве, скажем число станков; L — объем трудовых ресурсов, например число рабочих; y — выпуск продукции в стоимостном выражении.

Величину $l = y/L$ естественно назвать средней производительностью труда — ведь это количество продукции (в стоимостном выражении), произведенное одним рабочим.

Величину $k = y/K$ естественно назвать средней фондоотдачей — ведь это количество продукции (в стоимостном выражении), приходящееся на один станок (на одну единицу фондов).

Величину $f = K/L$ естественно назвать средней фондовооруженностью или просто фондовооруженностью — ведь это стоимость фондов, приходящаяся в среднем на единицу трудовых ресурсов, например на одного рабочего.

С другой стороны, зафиксируем текущее состояние предприятия, т.е. объем фондов K и число рабочих L . Им соответствует выпуск продукции $y = y(K, L)$. Если нанять еще одного рабочего, то приращение выпуска составит $\Delta y = y(K, L + 1) - y(K, L)$. Это частное приращение и потому $\Delta y \approx y'_L(K, L) \cdot \Delta L$, а так как $\Delta L = 1$, то $\Delta y \approx y'_L(K, L)$.

Вывод: Частная производная от производственной функции по объему трудовых ресурсов (кратко: производная выпуска по труду) приблизительно равна добавочной стоимости продукции, произведенной еще одним дополнительным рабочим. По этой причине эта

частная производная $y'_L = \beta AK^\alpha L^{\beta-1}$ называется *предельной производительностью труда*.

Если же увеличить фонды еще на единицу — купить еще один станок, то добавочная стоимость продукции, произведенной на нем, окажется приблизительно равной частной производной от производственной функции по объему фондов (кратко: производной выпуска по фондам). Эта частная производная $y'_K = \alpha AK^{\alpha-1} L^\beta$ называется *предельной фондоотдачей*.

И предельная производительность труда, и предельная фондоотдача — это абсолютные величины. Но в экономике чрезвычайно удобно задавать такие вопросы: на сколько процентов изменится выпуск продукции, если число рабочих увеличится на 1%, или если фонды возрастут на 1%? и т.д. Такие вопросы и ответы на них используют понятие «эластичность функции по аргументу» или «относительная производная» (см. п. 2 раздела 5.1).

Напомним, что в случае функции одной переменной $y = f(x)$ эластичностью функции по аргументу называется величина $(\Delta y/y)/(\Delta x/x)$ или $y'_x/(y/x)$.

Для функции многих переменных обычная производная заменяется частной производной.

Продолжим рассмотрение производственной функции Кобба–Дугласа. Найдем эластичность выпуска продукции по труду $E'_L = y'_L/(y/L)$. Подставляя найденную выше частную производную y'_L и выражение y через K , L , получим $E'_L = \beta AK^\alpha L^{\beta-1}/(AK^\alpha L^\beta/L) = \beta$. Итак, параметр β имеет ясный экономический смысл — это эластичность выпуска по труду.

Аналогичный смысл имеет и параметр α — это эластичность выпуска по фондам.

Пример 6. Пусть производственная функция есть функция Кобба–Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 3%, надо увеличить фонды на 6% или численность рабочих на 9%. В 1997 г. один работник за месяц производил продукции на 1 млн руб., а всего работников 1000. Основные фонды оценивались в 10 млрд руб. Написать производственную функцию и величину средней фондоотдачи.

Видим, что эластичность выпуска по труду $\beta = 1/3$, а по фондам $\alpha = 1/2$, следовательно, функция Кобба–Дугласа имеет вид: $y = AK^{1/2}L^{1/3}$. Подставляя остальные данные, получим: $10^6 \cdot 1000 = A(10^{10})^{1/2}(1000)^{1/3}$, т.е. $A = 1000$. Окончательно: функция Кобба–Дугласа есть $y = 1000K^{1/2}L^{1/3}$, а средняя фондоотдача равна $k = y/K = 10^6 \cdot 1000/10^{10} = 0,1$.

ЗАДАЧИ

- Найдите все производные 1-го и 2-го порядков функций:
а) $u = (\sin x + \cos y)^2$; б) $u = x^2 + y^2 - 4xy$; в) $u = xy + x/y$.

2. Найдите $\partial^4 u / \partial x^4$, $\partial^4 u / \partial x^2 \partial y$, $\partial^4 u / \partial y^4$ для функции $u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4$.

3. Найдите производные 1-го и 2-го порядков от сложных функций: а) $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$; б) $u = f(x, x/y)$; в) $u = f(x, xy, xyz)$.

4. Пусть $u = PX$, где P — вектор-константа $(p_1, \dots, p_n)$. Докажите, что $du/dx_i = p_i$; $\nabla u = (du/dx_1, \dots, du/dx_n) = P$.

5. Рассмотрим задачу линейного программирования и ее центральную часть — теорию двойственности (см. раздел 3.2). Напомним так называемую 3-ю теорему двойственности. Рассмотрим задачу оптимального планирования:

$$P(X) = CX \rightarrow \max, \\ AX \leq B, X \geq 0$$

при данном векторе запасов ресурсов B . Назовем эту задачу B -задачей. Предположим, что при данном конкретном значении B^* вектора запасов все компоненты оптимального плана $X^*(B) = (x^*)$ строго положительны. Обозначим через Y^* оптимальное решение задачи, двойственной к B^* -задаче. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что если $|B - B^*| < \varepsilon$, то:

ассортимент выпускаемой продукции в оптимальном плане B -задачи остался прежним, т.е. таким же, как в B^* -задаче (но, вполне возможно, что количественно изменился);

оптимальное решение задачи, двойственной к B -задаче, осталось неизменным, т.е. $Y^*(B) = Y^*(B^*)$;

максимальная прибыль P^* в B -задаче выражается формулой $P^*(B) = P^* + Y^*(B^*)(B - B^*)$, где P^* — максимальная прибыль в B^* -задаче.

Ясно, что максимальная прибыль P^* в B -задаче есть функция $P^*(B)$ (потому что остальные переменные не изменяются). Но формула $P^*(B) = P^* + Y^*(B^*)(B - B^*)$ прямо указывает, что $\partial P^* / \partial b_i = y_i^*$, где y_i^* — оптимальное решение задачи, двойственной к B^* -задаче. Но, как известно, числа y_i^* называются двойственными оценками ресурсов. Итак, частная производная от максимальной прибыли равна двойственной оценке соответствующего ресурса.

6. Рассмотрите задачу 3 из раздела 7.1. Найдите частные производные функций издержек и прибыли по объемам конкретной выпускаемой продукции. Каков экономический смысл этих производных? Найдите эластичности этих функций по тем же аргументам и определите их экономический смысл.

7. Пусть производственная функция есть функция Кобба-Дугласа $y = 1000K^{1/2}L^{1/3}$. Найдите среднюю и предельную производи-

тельности труда, среднюю и предельную фондоотдачу, эластичности выпуска по труду и по фондам.

8.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

1. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Продолжим рассмотрение функций многих переменных на примере функции трех переменных. Специально напомним, как понимать обозначение $z = o(\rho)$: «величина z есть бесконечно малая по сравнению с ρ ». Как и в случае функции одной переменной, это означает, что $\lim_{\rho \rightarrow 0} z/\rho = 0$.

Пусть $u = f(x, y, z)$ — функция трех переменных.

Произведение частной производной $\partial u / \partial x$ на приращение Δx называется *частным дифференциалом* по x функции u , его обозначают $d_x u = \partial u / \partial x \cdot \Delta x$. Если приращение независимой x считать ее дифференциалом dx , то последняя формула будет записана так: $d_x u = \partial u / \partial x \cdot dx$.

Если, исходя из значений a, b, c переменных x, y, z придать этим переменным приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, то функция $u = f(x, y, z)$ получит приращение $\Delta u = \Delta f(a, b, c) = f(a + \Delta x, b + \Delta y, c + \Delta z) - f(a, b, c)$, которое называется *полным приращением функции*.

Определение 1. Функция $u = f(x, y, z)$ называется дифференцируемой в точке (a, b, c) , если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta f(a, b, c) = f'_x(a, b, c) \cdot \Delta x + f'_y(a, b, c) \cdot \Delta y + f'_z(a, b, c) \cdot \Delta z + o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ (т.е. ρ есть длина вектора $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ — приращения вектора-аргумента) или кратко

$$\Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + u'_z \Delta z + o(\rho). \quad (1)$$

Однако в то время, как в случае функции одной переменной $y(x)$ существования производной $y'(a)$ в точке a необходимо и достаточно для выполнения соотношения $y(a + \Delta x) = y(a) + y'(a)\Delta x + o(\Delta x)$, для функции многих переменных существования частных производных, вообще говоря, недостаточно для выполнения соотношения вида (1) — нужно, чтобы частные производные существовали в некоторой окрестности рассматриваемой точки и были непрерывны в ней.

Если функция дифференцируема в точке (a, b, c) , то линейная часть ее приращения в этой точке, т.е. $u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + u'_z \Delta z = f'_x(a, b, c) \cdot \Delta x + f'_y(a, b, c) \cdot \Delta y + f'_z(a, b, c) \cdot \Delta z$, называется *дифференциалом (полным) функции* в этой точке и обозначается du или $df(a, b, c)$.

Легко видеть, что полный дифференциал (если он существует) есть сумма частных дифференциалов.

Пример 1. Пусть u есть функция из примера 1 раздела 8.1, т.е. $u = x^2y + 2z$. Найдем ее дифференциал. В указанном примере были вычислены частные производные: $\partial u/\partial x = 2xy$; $\partial u/\partial y = x^2$; $\partial u/\partial z = 2$. Следовательно, $du = 2xy \cdot dx + x^2 \cdot dy + 2 \cdot dz$.

2. Геометрический смысл 1-го дифференциала. Напомним, что для функции одной переменной $y = f(x)$ ее производной в точке x называется предел отношения ее приращения $\Delta f(x)$ в этой точке к приращению аргумента Δx при $x \rightarrow 0$.

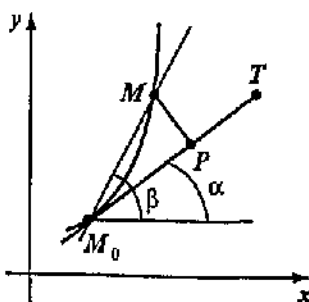


Рис. 1

Геометрически отношение $\Delta f(x)/\Delta x$ является тангенсом угла β (рис. 1), который образует секущая, проходящая через точки M_0 и M , с осью OX . Если $\Delta x \rightarrow 0$, то точка M стремится к точке M_0 , а угол β стремится к углу α , который образует касательная к графику функции в точке M_0 с осью OX и, следовательно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x)/\Delta x =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha.$$

Сама секущая при этом стремится к некоторому предельному положению, которое и называется касательной к графику функции $f(x)$ в точке x . Отсюда получаем: $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k$, где k — угловой коэффициент касательной в этой точке. В этом и состоит геометрический смысл производной и самого понятия дифференцируемости функции в точке.

Следовательно, уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 есть $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$.

Легко, впрочем, видеть, что касательную можно определить и следующим образом.

Определение 2. Прямая M_0T называется касательной к кривой K в точке M_0 на ней, если расстояние $|MP|$ переменной точки M кривой K от прямой M_0T , при стремлении расстояния $|M_0M|$ к нулю, является величиной бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $|M_0M|$ (т.е. отношение $|MP|/|M_0M|$ стремится к нулю).

Нечто подобное имеет место и в случае функции многих переменных. Геометрический смысл дифференциала функции многих переменных продемонстрируем на примере функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Аналогично только что сформулированному определению касательной дадим определение касательной плоскости.

Определение 3. Плоскость M_0K называется касательной плоскостью к поверхности $\mathcal{P}$ в точке M_0 на ней, если расстояние $|MP|$ переменной точки M поверхности $\mathcal{P}$ от этой плоскости, при стремлении расстояния $|M_0M|$ к нулю, является величиной бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $|M_0M|$ (т.е. отношение $|MP|/|M_0M|$ стремится к нулю).

Пусть поверхность $\mathcal{P}$ задана уравнением $z = f(x, y)$, т.е. является графиком функции $z = f(x, y)$. Тогда можно доказать, что эта поверхность имеет в точке $M(x_0, y_0)$ касательную плоскость тогда и только тогда, если функция $f(x, y)$ дифференцируема в этой точке. В этом случае касательная плоскость задается уравнением:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (2)$$

В общем случае, т.е. когда функция $u = u(x_1, \dots, x_n)$ произвольного числа переменных, касательная плоскость называется касательной гиперплоскостью и функция дифференцируема в точке $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ тогда и только тогда, если в этой точке существует касательная гиперплоскость, имеющая уравнение $u - u_0 = f'_x(X^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + f'_n(X^0)(x_n - x_n^0)$.

Пусть $X - X^0$ есть вектор $(x_1 - x_1^0, \dots, x_n - x_n^0)$, тогда кратко уравнение касательной гиперплоскости запишется так: $u - u_0 = \nabla f(X^0)(X - X^0)$.

В этом и состоит геометрический смысл дифференциала функции многих переменных и самого понятия ее дифференцируемости в точке.

3. Производная по направлению, градиент функции. Частные производные функции $u(x_1, \dots, x_n)$ по $x_1, \dots, x_n$ выражают скорость изменения функции по направлению координатных осей. Например, du/dx_1 есть скорость изменения функции по x_1 — точка предполагается перемещающейся лишь параллельно оси Ox_1 , координаты $x_2, \dots, x_n$ при этом остаются неизменными. Между тем вполне правомерно поставить вопрос о скорости изменения функции по какому-нибудь направлению, не обязательно совпадающему с какой-нибудь из координатных осей.

Пусть $u = f(x, y, z)$ — функция трех переменных. Фиксируем точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и какую-нибудь направленную прямую (ось) l , проходящую через эту точку. Пусть $M(x, y, z)$ — какая-нибудь другая точка этой прямой и $|M_0M|$ — расстояние от M_0 до M , взятое со знаком «+», если направление от M_0 к M совпадает с направлением оси, и со знаком «-» в противном случае. Пусть M неограниченно приближается к M_0 , тогда предел $\lim_{M \rightarrow M_0} (f(M) - f(M_0))/|M_0M|$ называется

производной от функции f по направлению l и обозначается $\partial f(M_0)/\partial l$ или $\partial f(x_0, y_0, z_0)/\partial l$.

Эта производная характеризует скорость изменения функции в точке M_0 по направлению l .

Пусть ось l образует с осями OX , OY , OZ углы α , β , γ , тогда ось l задается параметрическими зависимостями координат от параметра t , который измеряет расстояние точки $M(x, y, z)$ на оси от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$: $x - x_0 = t \cdot \cos \alpha$, $y - y_0 = t \cdot \cos \beta$, $z - z_0 = t \cdot \cos \gamma$. Следовательно, по правилу дифференцирования при параметрическом задании (см. п. 2 раздела 8.1) получаем: $\partial f/\partial t = f'_x x'_t + f'_y y'_t + f'_z z'_t = f'_x \cos \alpha + f'_y \cos \beta + f'_z \cos \gamma$. Это и есть производная в точке M_0 по направлению l .

Конечно, направление может быть задано просто соответствующим вектором. Нетрудно доказать, что вектор, составленный из частных производных в данной точке M , показывает направление, по которому функция $u = f(x, y, z)$ возрастает наиболее быстро. Этот вектор уже назван градиентом функции в данной точке и обозначен $\nabla u = (u'_x, u'_y, u'_z)$ (см. п. 1 раздела 8.1).

Пример 2. Найти направление в точке $(1, 4, 9)$, по которому функция $u = x^2 + yz$ возрастает наиболее быстро. Вычисляем частные производные в точке $(1, 4, 9)$: $u'_x = 2x$, $u'_y = z$, $u'_z = y$; следовательно, $\nabla u = (2x, z, y)$ и в указанной точке $\nabla u = (2, 9, 4)$.

Сравнивая уравнение касательной плоскости (2) в точке поверхности-графика функции $z = f(x, y)$ и ее градиента в этой точке, видим, что градиент функции есть нормальный вектор касательной плоскости. Это, конечно, верно и в общем случае — градиент функции в данной точке есть нормальный вектор касательной гиперплоскости в этой точке поверхности-графика функции от переменных.

4. Линеаризация сложных зависимостей. Продемонстрируем на примере функции Кобба—Дугласа возможность линеаризации производственной функции. Зафиксируем текущее состояние предприятия, т.е. объем фондов K , число рабочих L , им соответствующий выпуск продукции $y = y(K, L)$. При небольшом изменении числа рабочих dL и небольшом изменении объема фондов dK заменим изменение выпуска dy приблизительно равным ему полным дифференциалом $dy = y'_K dK + y'_L dL$. Но y'_K — это предельная производительность труда, а y'_L — это предельная фондотдача. Следовательно, $y'_L dL$ — это стоимость добавочной продукции, произведенной добавочным числом рабочих dL , а $y'_K dK$ — это стоимость добавочной продукции, произведенной с использованием добавочного объема фондов dK . Получаем следующий вывод,

Вывод. При небольших изменениях числа рабочих и объема фондов изменение стоимости выпуска приблизительно равно сумме стоимости добавочной продукции, произведенной добавочным числом рабочих на прежнем объеме фондов (на прежнем оборудовании) и плюс стоимость добавочной продукции, произведенной прежним составом рабочих с использованием добавочных фондов. Таким образом, для подсчетов можно использовать предельную производительность труда и предельную фондоотдачу текущего состояния (до изменений числа рабочих и объема фондов).

В этом и состоит общая идея линеаризации: замена функции многих переменных $u(x_1, \dots, x_n)$ в окрестности точки $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ линейной функцией $L(X) = u(X^0) + u'_1(X^0)(x_1 - x_1^0) + \dots + u'_n(X^0)(x_n - x_n^0)$. При этом разность $u(X) - L(X)$ является бесконечно малой величиной по сравнению с расстоянием точки X от X^0 . При линеаризации зависимость приращения линейной функции-приближения $L(X)$ от аргументов очень проста: приращение линейной функции-приближения пропорционально приращению аргумента, а коэффициент пропорциональности является значением частной производной (см. также задачу 5 из раздела 8.1).

5. Дифференциальные свойства функции полезности. Рассмотрим эти свойства в качестве иллюстрации рассмотренных в этой и в предыдущих лекциях понятий частного дифференцирования (о функции полезности см. п.3 раздела 7.1).

Многомерная функция полезности $u(x_1, \dots, x_n)$ — субъективная числовая оценка данным индивидом полезности u набора $X = (x_1, \dots, x_n)$ товаров. Она неубывающая, т.е. $u(X_1) \leq u(X_2)$, если $X_1 \leq X_2$, и вогнутая. Кроме того, будем предполагать, что каждый товар желателен, т.е. если $X \geq Y$ и $x_i > y_i$ для какого-то $i = 1, \dots, n$, то $u(X) > u(Y)$. Предположим также, что функция u дифференцируема и имеет необходимые производные 2-го порядка. Частная производная du/dx_i называется *предельной полезностью i -го товара*. Свойство неубывания функции полезности и желательности каждого товара заменим более сильным свойством положительности всех частных производных.

Вектор, составленный из частных производных функции полезности $du/dX = (du/dx_1, \dots, du/dx_n)$, естественно назвать *вектором предельных полезностей*. Напомним, что такой вектор называется также *градиентом*. Он показывает направление наибольшего роста значений функции.

Использование предельных соотношений для анализа экономических закономерностей, для анализа поведения субъектов экономики является сущностью «маржинализма» — течения в экономи-

ческой теории, зародившегося в середине XIX в. Одним из основоположников этого течения был немец К. Госсен. Он первый сформулировал основополагающее свойство функции полезности: с увеличением потребления товара его полезность уменьшается — это и есть так называемый 1-й закон Госсена. То есть если вы голодны, то первый гамбургер съедите с большой охотой, второй уже не так понравится и т.д. На дифференциальном языке это означает, что предельные полезности убывают при возрастании аргументов — количества потребляемых товаров, т.е. вторые частные производные должны быть отрицательны.

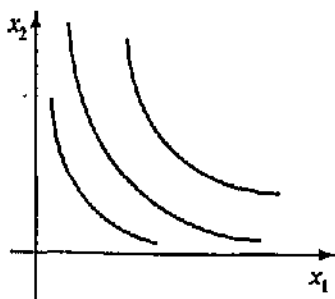


Рис. 2

Пример 3. Для функции полезности $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} \sqrt{x_2}$ начертить кривые безразличия (линии постоянства полезности). Найти вектор предельных полезностей, проверить выполнение 1-го закона Госсена.

Решение. Построим кривые постоянства полезности $U_c = \{(x_1, x_2): \sqrt{x_1} \sqrt{x_2} = c\}$ (рис. 2). Найдем частные производные: $du/dx_1 = \sqrt{x_2}/(2\sqrt{x_1})$, $du/dx_2 = \sqrt{x_1}/(2\sqrt{x_2})$. Следовательно, вектор предельных полезностей есть $\nabla u = (\sqrt{x_2}/(2\sqrt{x_1}), \sqrt{x_1}/(2\sqrt{x_2}))$.

Для проверки 1-го закона Госсена находим вторые частные производные: $u''_{x_1 x_1} = -(1/4)x_1^{-3/2} x_2^{1/2}$, $u''_{x_2 x_2} = -(1/4)x_1^{1/2} x_2^{-3/2}$, они отрицательны, что и свидетельствует о выполнении 1-го закона Госсена.

К функциям полезности относятся, например:

функция стоимости $u(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$;

неоклассическая функция $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$.

Еще одна функция — $u(x_1, x_2) = \min \{kx_1, mx_2\}$, где $k, m > 0$ является несколько особой и представляет интерес как крайний случай.

ЗАДАЧИ

1. Опишите, из чего складывается увеличение объема прямого кругового цилиндра при небольших увеличениях радиуса его основания и его высоты. Проведите аналогичные исследования по поводу объема прямоугольного параллелепипеда при небольших увеличениях трех его измерений, а также площади треугольника как функции трех его сторон (см. пример 1 из п. 1 раздела 7.1).

2. Найдите дифференциалы функций в общем виде и в точке (1, 1): а) $u = (x^2 + y)^3$; б) $u = x^2 - y^2 + 4x^2y$; в) $u = xy + x - y$.

3. Найдите предельные полезности и градиент в различных точках у функций полезности: а) $u = 3x_1 + 5x_2$; б) $u = \min \{x_1, 2x_2\}$.

4. На карте местности обычно проводят горизонтали — линии постоянной высоты. Можно ли по этой карте узнать примерные градиенты в разных точках?

Тема 9.

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ЭКОНОМИКЕ

9.1. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Экстремум функции и его нахождение. По ходу изложения будем напоминать соответствующие понятия для функции одной переменной.

Определение экстремумов функции одной переменной было дано в разделе 5.2. В силу важности этого понятия напомним его еще раз.

Значение функции $f(a)$ называется максимумом (минимумом) функции $f(x)$, если оно является наибольшим (наименьшим) в некоторой окрестности точки a , т.е. в этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$). Соответствующее значение аргумента a называется точкой максимума (минимума). Максимумы и минимумы функции называются экстремумами функции, а точки максимума и минимума — точками экстремумов.

Определение экстремумов функции многих переменных точно такое же. Напомним только, что в одномерном случае окрестность точки есть любое множество, содержащее открытый интервал с центром в этой точке. В многомерном же случае под окрестностью точки понимается любое множество, содержащее открытый шар с центром в этой точке (см. п. 3 раздела 7.2). То есть в определении окрестности обычное расстояние между числами заменяется расстоянием в евклидовом пространстве, в котором определена функция многих переменных.

Напомним, что точка является внутренней точкой области, если некоторая окрестность точки целиком содержится в этой области.

Точка a называется критической точкой функции $f(x)$, если $f'(a) = 0$ или $f'(a)$ не существует. Точка a называется *стационарной точкой* функции $f(x)$, если она есть внутренняя точка области определения функции и $f'(a) = 0$.

Теорема (необходимый признак экстремума). Если функция имеет во внутренней точке экстремум, то эта точка является критической точкой этой функции и стационарной, если в ней существует производная.

Пусть теперь $u = f(x_1, \dots, x_n)$ — функция n переменных.

Точно так же, как и в случае одной переменной, точка называется критической точкой функции, если все частные производные равны нулю или какая-нибудь из них не существует. Точка называется стационарной точкой функции, если она есть внутренняя точка области определения и все частные производные равны нулю.

Теорема 1 (необходимый признак экстремума функции многих переменных). Если функция имеет во внутренней точке экстремум, то эта точка является критической точкой этой функции и стационарной, если в ней существуют все частные производные.

Доказательство точно такое же, как и для функции одной переменной (см. п. 1 раздела 6.1).

Итак, «подозрительными» на экстремум являются те точки, в которых все частные производные равны нулю или какая-нибудь из них не существует; в случае если функция всюду имеет частные производные, то координаты этих точек можно найти, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial u / \partial x_1 = 0, \\ \vdots \\ \partial u / \partial x_n = 0. \end{cases}$$

Пример 1. Найти экстремум функции $z = x^2 + (y - 1)^2$.

Найдя частные производные и приравняв их нулю, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial z / \partial x = 2x = 0, \\ \partial z / \partial y = 2(y - 1) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы очевидно: $x = 0$, $y = 1$. Поскольку $z \geq 0$ при всех x , y , то ясно, что найденная точка $(0, 1)$ есть точка минимума.

2. Достаточное условие экстремума. Конечно, рассмотренный пример очень простой. Для функции одной переменной есть простые достаточные признаки экстремума (см. п. 1 раздела 6.1).

Теорема (первый достаточный признак экстремума). Пусть $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки a и дифференцируема в ней всюду, кроме, быть может, точки a . Тогда:

- 1) если $f'(x) \geq 0$ при $x < a$ и $f'(x) \leq 0$ при $x > a$, то a есть точка максимума функции;
- 2) если $f'(x) \leq 0$ при $x < a$ и $f'(x) \geq 0$ при $x > a$, то a есть точка минимума функции.

Теорема (второй достаточный признак экстремума). Пусть $f(x)$ и ее производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны в некоторой окрестности точки a и пусть $f'(a) = 0$. Тогда:

- 1) если $f''(a) < 0$, то a есть точка максимума функции;
- 2) если $f''(a) > 0$, то a есть точка минимума функции.

Для функций многих переменных достаточные признаки экстремума много более сложные. Ограничимся функциями двух переменных.

Пусть $z = f(x, y)$ и M — стационарная точка, т.е. $f'_x(M) = f'_y(M) = 0$. Обозначим $A = f''_{xx}(M)$, $B = f''_{xy}(M)$, $C = f''_{yy}(M)$, $D = AC - B^2$.

Теорема 2 (достаточный признак экстремума). Если $D > 0$ и $A < 0$, то в точке M максимум, если $D > 0$ и $A > 0$, то — минимум. Если же $D < 0$, то экстремума нет.

Что касается нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на каком-нибудь множестве, то действовать надо точно так же, как и в случае одной переменной:

- а) найти все внутренние точки множества, «подозрительные» на экстремум (в которых все частные производные равны нулю либо в которых не существует какая-нибудь частная производная);
- б) присоединить к ним некоторые «подозрительные» точки, лежащие на границе рассматриваемого множества;
- в) найти в этом множестве точки с наибольшим и наименьшим значениями.

Так действуют, например, в задачах линейного программирования (см. раздел 3.1). Напомним, что это класс задач, в которых надо найти экстремум линейной функции при линейных же ограничениях на переменные. Доказано, что если в таких задачах экстремум функции достигается, то он достигается в некоторой угловой точке допустимого множества. Угловая точка — это некоторая особая точка, обязательно лежащая на границе исследуемого множества.

3. Условный экстремум, метод множителей Лагранжа. Пусть надо найти экстремум функции $f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$ при наличии нескольких ограничений вида $\varphi_j(X) = 0, j = 1, \dots, m; m < n$. Поступают следующим образом:

- а) составляют функцию Лагранжа $L(X) = f(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(X)$ уже от $n + m$ переменных (n прежних $x_1, \dots, x_n$ и m новых $\lambda_1, \dots, \lambda_m$);
- б) составляют и решают систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial L / \partial x_1 = 0, \\ \vdots \\ \partial L / \partial x_n = 0, \\ \partial L / \partial \lambda_1 = 0, \\ \vdots \\ \partial L / \partial \lambda_m = 0, \end{cases}$$

т.е. находят «подозрительные» точки на экстремум функции Лагранжа;

- в) решается вопрос о наличии в «подозрительной» точке экстремума (например, с помощью теоремы 2 — см. выше), при этом предполагаются выполненными соотношения:

$$\sum_{i=1}^n \partial \varphi_j / \partial x_i \cdot dx_i = 0, j = 1, \dots, m.$$

4. Задача оптимизации выбора потребителя. Эту задачу рассмотрим в качестве приложения описанного метода нахождения условного экстремума с помощью множителей Лагранжа.

Будем считать, что каждый товар имеет цену p_i , а индивид имеет доход Q — какое-то количество денег, в рамках которого он и действует, покупая нужный ему набор товаров. На покупку набора товаров $X = (x_1, \dots, x_n)$ надо затратить денег в количестве $c(X) = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i = PX$. Таким образом, индивид может купить только

такой набор X , при котором $PX \leq Q$. Следовательно, множество наборов товаров, доступных ему при доходе Q , есть $B = B(P, Q) = \{X: X \geq 0, PX \leq Q\}$. Это множество называется бюджетным (см. также п. 3 раздела 2.1).

Предложение 1. Бюджетное множество ограничено и замкнуто.

Доказательство. Пусть $r = \min p_i$, тогда, как легко видеть, если $X \in B$, то $x_i \leq Q/r$ для $i = 1, \dots, n$, т.е. множество B ограничено.

Докажем замкнутость. Пусть $X_k \in B$ для всякого $k \in N$ и $X_k \rightarrow Z$. Тогда в силу непрерывности линейной функции $PX_k \rightarrow PZ$ и, поскольку $PX_k \leq Q$, то и $PZ \leq Q$. Следовательно, $Z \in B$.

Границей бюджетного множества называется множество $G = \{X \in B: PX = Q\}$. Граница G — это отрезок в случае двух товаров, часть плоскости, ограниченная треугольником, в случае трех товаров, и в общем случае есть часть гиперплоскости в пространстве товаров.

Бюджетное множество $B(P, Q)$ зависит от дохода Q и системы цен P , но от каких-либо характеристик индивида, например системы его предпочтений, не зависит.

Потребитель, имея доход, желает его потратить и, естественно, с максимальной пользой. Польза понимается в смысле системы его предпочтений или его функции полезности. Это приводит к следующей задаче математического программирования.

Найти набор товаров $X = (x_1, \dots, x_n)$, максимизирующий функцию полезности $u(x_1, \dots, x_n)$ при выполнении бюджетного ограничения $PX = p_1x_1 + \dots + p_nx_n \leq Q$; по смыслу задачи все переменные принимают неотрицательные значения, т.е. $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$.

Рассматриваемую задачу можно сформулировать более кратко:

$$\begin{cases} u(X) \rightarrow \max, \\ PX \leq Q, \\ X \geq 0 \end{cases}$$

или даже так:

$$\begin{cases} u(X) \rightarrow \max, \\ X \in B(P, Q). \end{cases} \quad (1)$$

Поскольку $u(X)$ — непрерывная функция своих аргументов, а бюджетное множество B ограничено и компактно, то $u(X)$ достигает на множестве B своего максимума, т.е. решение задачи (1) существует. Очевидно, что любая точка X^* максимума функции $u(X)$ лежит на границе G бюджетного множества. Действительно, если предположим противное, т.е. что Z — точка максимума, но $Z \notin G$, тогда $PZ < Q$. Однако тогда потребитель имеет неиспользованное количество денег $Q - PZ$, и на эти деньги он может купить какой-то дополнительный набор товаров Y , причем можно считать, что $Y > 0$. Но тогда $Y \in B$, однако $u(Z + Y) > u(Z)$ в силу того, что каждый товар желателен. Получили противоречие с тем, что Z — точка максимума функции $u(X)$ на бюджетном множестве.

Предложение 2. Если $u(X)$ строго вогнута, то решение задачи (1) единственно, т.е. существует только одна точка максимума функции полезности на бюджетном множестве.

Напомним, что функция $u(X)$ называется строго вогнутой, если для любых X, Y из того, что $0 < \lambda < 1$ следует, что $u(\lambda X + (1 - \lambda)Y) > \lambda u(X) + (1 - \lambda)u(Y)$.

Доказательство. Предположим, что A и C — две точки максимума, т.е. $u(X) \leq u(A) = u(C)$ для любой точки X множества B . Мы уже знаем, что точки A и C лежат на границе бюджетного множества, т.е. $PA = PC = Q$. Рассмотрим точку $E = A/2 + C/2$. Видим, что $PE = P(A/2 + C/2) = Q$, т.е. $E \in B$. В силу строгой вогнутости функции $u(X)$ имеем: $u(E) > u(A) = u(C)$. Получили противоречие с тем, что A и C есть точки максимума функции на бюджетном множестве.

Итак, при строгой вогнутости функции полезности существует в бюджетном множестве единственная точка максимума функции полезности. Таким образом, у потребителя даже нет выбора в том, как с наибольшей пользой потратить свои деньги, так как существует единственный набор товаров, максимизирующий полезность. Эта единственная точка максимума называется точкой спроса или просто спросом потребителя. Будем обозначать эту точку X^* .

Изучим точку спроса. Пока установлено только, что она должна лежать на границе бюджетного множества. Таким образом, задача (1) сводится к следующей:

$$\begin{cases} u(X) \rightarrow \max, \\ PX = Q \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u(X) \rightarrow \max, \\ X \in B(P, Q). \end{cases} \quad (2)$$

Эту задачу можно решить с помощью множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа $L(X, \lambda) = u(X) + \lambda(Q - PX)$, найдем частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \partial L / \partial X = 0, \\ \partial L / \partial \lambda = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \partial u / \partial X - \lambda P = 0, \\ Q - PX = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \partial u / \partial X = \lambda P, \\ Q - PX = 0. \end{cases}$$

5. Характеристика точки спроса. Получаем следующий вывод: точка спроса лежит на границе бюджетного множества и характеризуется тем, что в ней вектор предельных полезностей пропорционален вектору цен. Можно и так сказать: в точке спроса отношение предельной полезности товара к его цене есть величина постоянная:

$$(\partial u / \partial x_i) / p_i = \lambda^* \text{ для любого } i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

т.е. если, скажем, i -й товар в 3 раза дороже j -го товара, то уменьшение его на единицу компенсируется (с точки зрения функции полезности) увеличением j -го товара на три единицы. Это можно выразить так: взаимозаменяемы такие количества товаров, которые стоят оди-

наково. Иными словами, индивидууму невыгодно потреблять одно благо вместо другого, стоящего столько же, и вообще как-то изменять структуру потребления, поскольку всякое такое изменение может только лишь ухудшить его благосостояние. Такая характеристика точки спроса называется *2-м законом Госсена*.

Пример 2. Найдем точку спроса потребителя с функцией полезности $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} \sqrt{x_2}$.

Имеем $\partial u / \partial x_1 = \sqrt{x_2} / (2 \sqrt{x_1})$, $\partial u / \partial x_2 = \sqrt{x_1} / (2 \sqrt{x_2})$, значит, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} (\partial u / \partial x_1) / (\partial u / \partial x_2) = p_1 / p_2, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = Q \end{cases}$$

или $\begin{cases} (\sqrt{x_2} / (2 \sqrt{x_1})) / (\sqrt{x_1} / (2 \sqrt{x_2})) = p_1 / p_2, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = Q. \end{cases}$

Окончательно:

$$\begin{cases} x_2 / x_1 = p_1 / p_2, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = Q, \end{cases}$$

т.е. $x_1^* = Q / (2p_1)$, $x_2^* = Q / (2p_2)$.

ЗАДАЧИ

1. При ценах p и доходе Q найти (геометрически и аналитически) точку спроса для функции полезности: а) $u(x_1, x_2) = \min \{x_1, 2x_2\}$; б) $u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$.

Решение.

а) Функция $u(x_1, x_2) = \min \{x_1, 2x_2\}$ означает, что излишки первого или второго товара сверх отношения 2 : 1 не приносит пользы потребителю. Он получает большую пользу только при увеличении обоих товаров в пределах сохранения пропорции 2 : 1. Товары с такой функцией полезности называются взаимодополнительными (например, чай и сахар). Геометрическое решение задачи нахождения точки спроса изображено на рис. 1, а. Аналитическое решение состоит в решении системы:

$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 = Q, \\ x_1 = 2x_2. \end{cases}$$

Ее решение есть $x_1^* = Q / (2p_1 + p_2)$, $x_2^* = 2Q / (2p_1 + p_2)$.

б) Геометрическое решение изображено на рис. 1, б — при $p_1/p_2 < 2/3$ и рис. 1, а — при $p_1/p_2 > 2/3$. На рис. 1, б точка спроса расположена в вершине А бюджетного множества, на рис. 1, а — в вершине В.

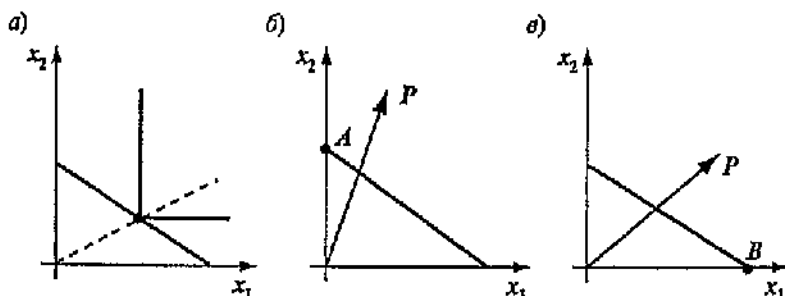


Рис. 1

При $p_1/p_2 = 2/3$ точек спроса бесчисленное множество: любая точка на границе бюджетного множества.

2. Исследуйте на экстремум функции: а) $z = x^2 - (y - 1)^2$; б) $z = (x - y + 1)^2$; в) $z = x^2 + y^2 - 3xy$; г) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$; д) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Найдите точки условного экстремума функций: а) $z = xy$, если $x + y = 1$; б) $z = x/a + y/b$, если $x^2 + y^2 = 1$; в) $z = x^2 + y^2$, если $x/a + y/b = 1$.

4. Найдите точки условного экстремума функций графическим способом («двигая» линии уровня функции — см. п. 3 раздела 3.1):

- а) максимума для функций $z = xy$ и $z = 2x + 3y$, если $x^2 + y^2 = 1$; б) минимума для функций $z = x^2 + y^2$ и $z = 2x + 3y$, если $xy = 1$, $x > 0$.

5. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости имеет наименьшую поверхность?

6. В полушар заданного радиуса впишите прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

9.2. «ЗОЛОТОЕ ПРАВИЛО» ЭКОНОМИКИ

1. «Золотое правило» экономики для одпоресурсной фирмы. Представим себе бизнесмена, руководителя фирмы. Он размышляет, не нанять ли ему еще одного работника. Существует, однако, очень простое правило для разрешения подобного вопроса: нанимать следует только тогда, когда дополнительный доход, полученный от этого работника, превышает назначаемую ему зарплату.

Это простое правило столь экономически значимо, что его называют «золотым правилом» экономики. Суть этого правила изложена, а остальное в этом разделе лишь его математическое обрамление.

В применении к одноресурсной фирме это правило было изложено в п. 3 раздела 6.1. Кратко повторим основное.

Предположим, фирма выпускает один товар и его количество обозначим y . Используется только один ресурс. Фирма полностью характеризуется своей производственной функцией $y = F(x)$ — зависимостью объема выпускаемого товара от объема затраченного ресурса x .

Предполагается, что производственная функция удовлетворяет двум аксиомам:

- 1) хотя бы на части ее области определения, называемой экономической областью E , эта функция неубывающая, в этой области производная $F'(x)$ неотрицательна. Она называется предельным продуктом;
- 2) существует выпуклое подмножество S экономической области, для которой подмножества $\{x \in S: F(x) \geq a\}$ также выпуклы для всех a . В этом подмножестве вторая производная неположительна.

Остановимся на экономическом содержании этих двух аксиом.

Первая аксиома утверждает, что производственная функция отражает бесспорное и в то же время тривиальное утверждение: в мало-мальски разумной экономике увеличение затрат не может привести к уменьшению выпуска.

Из второй аксиомы поясним только экономический смысл требования неположительности второй производной. Это свойство называется в экономике *законом убывающей отдачи* или *убывающей доходности*: по мере увеличения объема затраченного ресурса, начиная с некоторого момента (при входе в область S !) начинает уменьшаться предельный продукт. Классическим примером этого закона является добавление все большего и большего количества труда в производство зерна на фиксированном участке земли.

В дальнейшем будем считать, что производственная функция имеет необходимые производные и удовлетворяет обеим аксиомам на всей области определения.

Пусть p — цена единицы ресурса и v — цена единицы выпускаемого товара. Следовательно, прибыль W , являющаяся в итоге функцией x (и цен, но они считаются постоянными), есть $W(x) = vF(x) - px$. Следовательно, приходим к задаче фирмы

$$\begin{aligned} W(x) &\rightarrow \max, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Приравнивая производную функции $W(x)$ нулю, получим:

$$F'(x) = p/v. \quad (2)$$

Очевидно, что объем перерабатываемого ресурса положителен и, следовательно, точка, даваемая соотношением (2), оказывается внутренней, т.е. точкой экстремума, и поскольку еще предполагается неположительность второй производной, то это точка максимума.

Итак, при естественных предположениях на производственную функцию (эти предположения выполняются для производителя со здравым смыслом и в разумной экономике) соотношение (2) дает решение задачи фирмы, т.е. определяет объем перерабатываемого ресурса, в результате чего получается выпуск, дающий максимальную прибыль. Точку a , даваемую соотношением (2), назовем оптимальным решением фирмы. Остановимся на экономическом смысле соотношения (2).

Напомним, что $F'(x)$ называется предельным продуктом, $vF'(x)$ — это стоимость предельного продукта, дополнительно полученного из единицы ресурса. Однако стоимость единицы ресурса равна p , т.е. получилось равновесие: можно вовлечь в производство дополнительно единицу ресурса, потратив на его закупку p , но в результате выигрыша не будет, так как получим после переработки и реализации произведенного товара столько же денег, сколько затратили на покупку единицы ресурса. Итак, оптимальная точка, даваемая соотношением (2), является точкой равновесия — уже невозможно «выжать» из товаров ресурсов больше, чем затрачено на их покупку.

Очевидно, наращивание выпуска фирмы происходило постепенно: сначала стоимость предельного продукта была меньше покупной цены потребного для его производства ресурсов. Наращивание объема производства идет до тех пор, пока не начнет выполняться соотношение (2): равенство стоимости предельного продукта и покупной цены потребного для его производства ресурса.

При определенных условиях, наложенных на производственную функцию (см. выше аксиомы 1, 2), оптимальное решение задачи фирмы, даваемое соотношением (2), единственно для всех p и v .

Итак, в задаче (1) решение a^* единственно для p и v . Таким образом, получается функция $a^* = a^*(p, v)$, называемая спросом на ресурс. Что содержательно означает эта функция?

Если сложились цена p на ресурс и цена v на выпускаемый товар, то фирма, характеризующаяся данной производственной функцией, определяет объем перерабатываемого ресурса в соответствии с функцией $a^*(p, v)$ и будет закупать ресурс в этом объеме на рынке, т.е. это есть функция спроса со стороны фирмы на ресурс. А дальше, уже зная объем перерабатываемого ресурса и подставляя этот объем в производственную функцию, получим объем выпускаемого товара как функцию цен. Последняя функция называется *функцией предложения продукции*.

Очевидно, что объем перерабатываемого ресурса положителен и, следовательно, точка, даваемая соотношением (2), оказывается внутренней, т.е. точкой экстремума, и поскольку еще предполагается неположительность второй производной, то это точка максимума.

Пример 1. Несколько семей рыбаков сообща владеют небольшим рыболовческим судном. Объем добычи рыбы y (кг/день) зависит от количества рыбаков x на судне так: $y = 100\sqrt{x}$. Цена 1 кг рыбы (в 1997 г.) 8000 руб., зарплата рыбака $p = 100\,000$ (руб./день). Кроме зарплат, другие издержки не учитываются. Найти оптимальный размер бригады рыбаков.

Решение. Первый способ решения — прямой. Прибыль равна выручке минус зарплата: $W = 8000y - 100000x = 800000\sqrt{x} - 100000x$. Находим производную и приравниваем ее нулю: $W' = 400\,000/\sqrt{x} - 100000 = 0$. Отсюда получаем: $x = 16$.

Второй способ решения — использование соотношения (2). Имеем $50/\sqrt{x} = 100000/8000$. Следовательно, $x = 16$.

Найдено оптимальное количество рыбаков, которые должны работать на судне одновременно.

2. «Золотое правило» экономики для многоресурсной фирмы. В общем случае, т.е. когда фирма использует не один ресурс, а несколько, многое в теории аналогично.

Итак, фирма выпускает один товар и его количество обозначим y . Вектор ресурсов-затрат $X = (x_1, \dots, x_n)$. Затраты однозначно определяют выпуск, и эта связь есть производственная функция $y = F(X)$.

Будем предполагать, что производственная функция удовлетворяет необходимым условиям дифференцируемости, а также условиям, аналогичным изложенным в аксиомах 1, 2 (см. выше п. 1):

- 1) она неубывающая в экономической области E ; отсюда следует, что ее частные производные, называемые *предельными продуктами*, неотрицательны в этой области;
- 2) в рассматриваемом выпуклом подмножестве S всякое подмножество $\{X \in E: F(X) \geq a\}$ также выпукло для всех a .

Экономический смысл этих требований точно такой же, как и для случая одного ресурса: 1) увеличение затрат не может привести к уменьшению выпуска и 2) должен выполняться закон убывающей отдачи или убывающей доходности.

Пусть $P = (p_1, \dots, p_n)$ — вектор цен на ресурсы и v — цена единицы выпускаемого товара. Тогда прибыль W , являющаяся в итоге функцией X (и цен $v, p_1, \dots, p_n$, но они считаются постоянными), есть $W(X) = v y - P X = v F(X) - P X$. Следовательно, приходим к задаче многоресурсной фирмы:

$$\begin{aligned} W(X) &\rightarrow \max, \\ X &\geq 0. \end{aligned}$$

Приравнивая частные производные функции $W(x)$ нулю, получим:

$$v \cdot \partial F / \partial X = P. \quad (3)$$

Будем предполагать, что все затраты строго положительны (нулевые можно просто исключить из рассмотрения). Тогда точка, даваемая соотношением (3), оказывается внутренней, т.е. стационарной, точкой. Второе же условие, которому должна удовлетворять производственная функция, гарантирует, что это точка максимума.

Итак, при естественных предположениях на производственную функцию (эти предположения выполняются для производителя со здравым смыслом и в разумной экономике) соотношение (3) даст решение задачи многоресурсной фирмы, т.е. определяет объем X^* перерабатываемых ресурсов, в результате чего получается выпуск $y^* = F(X^*)$. Точку X^* или (y^*, X^*) назовем оптимальным решением фирмы. Повторим экономический смысл соотношения (3), которое даст оптимальное решение задачи многоресурсной фирмы.

В многомерном случае $\partial F / \partial X = (\partial F / \partial x_1, \dots, \partial F / \partial x_n)$ называется *предельным вектором-продуктом*, или *вектором предельных продуктов*. Этот вектор является откликом выпуска на изменение вектора ресурсов-затрат. Соотношение (3) утверждает, что в оптимальной точке вектор предельных продуктов пропорционален вектору цен, причем коэффициентом пропорциональности служит цена единицы продукции. Далее, $v \cdot \partial F / \partial X$ — это стоимость i -го предельного продукта, дополнительно полученного из одной единицы i -го ресурса. Однако стоимость единицы i -го ресурса равна p_i , т.е. имеем равновесие: можно привлечь в производство дополнительно единицу i -го ресурса, потратив на его закупку p_i , но в результате выигрыша не будет, так как получим после переработки ровно столько же денег, сколько затратили. Итак, оптимальная точка, даваемая соотношением (3), является точкой равновесия. — уже невозможно «выжать» из товаров-ресурсов больше, чем затрачено на их покупку.

Очевидно, наращивание выпуска фирмы происходило постепенно: сначала стоимость предельных продуктов была меньше покупной цены потребных для их производства товаров-ресурсов. Наращивание объемов производства идет до тех пор, пока не начнет выполняться соотношение (3): равенство стоимости предельных продуктов и покупной цены потребных для их производства товаров-ресурсов.

При определенных условиях, наложенных на производственную функцию (см. аксиомы 1, 2 в п. 1), оптимальное решение задачи фирмы, даваемое соотношением (3), единственно для всех $v > 0$ и $P > 0$. Таким образом, получается вектор-функция $X^*(v, P)$ или функции $x_i^* = x_i^*(v, P)$, $i = 1, \dots, n$. Эти n функций называются *функциями*

спроса на ресурсы при данных ценах на продукцию и ресурсы. Что содержательно означают эти функции?

Если сложились цены P на ресурсы и цена v на выпускаемый товар, то производитель, характеризующийся данной производственной функцией, определяет объем перерабатываемых ресурсов по функциям $x_i^*(v, P)$ и тем самым определяется оптимальный размер фирмы. А уже зная объемы перерабатываемых ресурсов и подставляя эти объемы в производственную функцию, получим выпуск как функцию цен.

Пример 2. В 1997 г. группа в количестве E «челноков» решила объединиться с N продавцами. Прибыль от дня работы (выручка минус расходы, но не зарплата) выражается формулой $W = 60\,000(EN)^{1/3}$. Зарплата «челнока» 12 000 руб. в день, продавца 8000 руб. в день. Найти оптимальный состав группы из «челноков» и продавцов, т.е. количество «челноков» и продавцов.

Решение. Составляем и решаем систему уравнений-соотношений (3):

$$\begin{cases} \partial W / \partial E = 60\,000(1/3)E^{-2/3}N^{1/3} = 12\,000, \\ \partial W / \partial N = 60\,000(1/3)E^{1/3}N^{-2/3} = 8000. \end{cases}$$

Разделив 1-е уравнение на 2-е, получим: $N/E = 3/2$, т.е. $N = (3/2)E$. Подставляя это выражение во 2-е уравнение, получим:

$$8000 = 60\,000(1/3)E^{1/3}[(3/2)E]^{-2/3},$$

откуда окончательно: $E = 125/18 \approx 7$, значит, $N = 10$.

ЗАДАЧИ

(все показатели относятся к 1997 г.)

1. Завод давал за месяц продукции на 10 млн руб., и его основные фонды составляли также 10 млн руб. Экономисты подсчитали, что для увеличения выпуска на 1 млн руб. надо приобрести оборудования на 3 млн руб. Нет ли здесь парадокса? Найдите производственную функцию (при условии, что она есть функция Кобба–Дугласа, в которой $\alpha + \beta = 1$), если численность рабочих 1000 человек.

2. Основные фонды фермерского хозяйства составляют 10 млн руб. Оно имеет девять работников — членов фермерской семьи. Для увеличения дохода фермер пригласил в хозяйство своего двоюродного брата и заметил, что доход возрос на 8% и составил 13 млн руб. Напишите выражение для функции Кобба–Дугласа (считайте, что $\alpha + \beta = 1$).

3. Бизнесмен решил основать небольшое автотранспортное предприятие по оказанию услуг населению. Ознакомившись со статистикой, он увидел, что примерная зависимость ежедневной выручки от числа автомашин A и числа рабочих N выражается формулой $Y = 90000 \cdot A^{1/2}N^{1/4}$. Амортизационные и другие ежедневные расходы на одну машину равны 40 000 руб., ежедневная зарплата сотрудника

10 000 руб. Найдите оптимальную численность рабочих и автомашин.

4. Бизнесмен задумался об открытии пивного бара. Предположим, что зависимость выручки Y (за вычетом стоимости пива и закусок) от числа столиков M и числа официантов F выражается формулой $Y = 20\,000 : M^{2/3} F^{1/4}$. Расходы на один столик составляют 5000 руб., зарплата официанта 10 000 руб. (все в расчете на одну смену). Найдите оптимальное число столиков.

9.3. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ЭКОНОМИКЕ

1. Понятие многокритериальной оптимизационной задачи. Обычная (однокритериальная) задача оптимизации формулируется следующим образом: найти $X \in D$, доставляющее экстремальное (например, максимальное) значение функции $z = f(X)$. Здесь D — область допустимых решений, $f(X)$ отражает зависимость единственного критерия оптимальности от принимаемого решения X . Роль лица, принимающего решения (ЛПР), состоит в задании условий, определяющих множество D , и в описании целевой функции $f(X)$.

В задачах многокритериальной оптимизации ситуация другая — имеется несколько целевых функций $z_1 = f_1(X), \dots, z_m = f_m(X)$, которые могут достигать своих максимальных значений в различных точках области допустимых решений. В этом случае ЛПР должно не только описать допустимую область D , задать целевые функции, но и указать принцип окончательного решения. Поэтому в решении многокритериальных задач роль субъективного фактора, роль знаний и интуиции ЛПР возрастает по сравнению с однокритериальными задачами.

Пример 1. Для выпуска двух видов продукции используются три вида ресурсов. Известна матрица норм расхода A , цены Q на ресурсы, цены реализации P продукции и запасы B ресурсов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = (1, 1, 4), \quad P = (17, 12), \quad B = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Если планируется произвести X единиц продукции, то стоимость потребных ресурсов равна QAX , предполагаемая выручка PX и тогда прибыль $W = PX - QAX$.

Можно пожелать добиться максимума выручки и прибыли одновременно. Тогда получим задачу с двумя целевыми функциями:

$$\begin{aligned} PX &\rightarrow \max, \\ (P - QA)X &\rightarrow \max, \\ AX &\leq B, \quad X \geq 0 \end{aligned}$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} z_1 &= 17x_1 + 12x_2 \rightarrow \max, \\ z_2 &= 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 20, \\ x_1 + x_2 &\leq 15, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 39, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

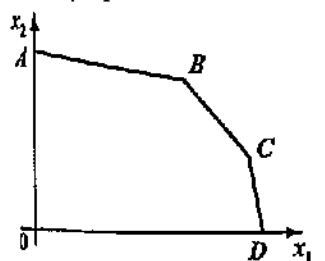


Рис. 1

Изобразим допустимое множество графически. Получим пятиугольник $OABCD$ (напомним, что линейная функция достигает экстремума в одной из угловых точек допустимого множества, см. п. 2 раздела 3.1). Значит, максимумы обеих функций достигаются в какой-либо из точек A, B, C, D (рис. 1). Составляем таблицу:

Вершина	$A(0, 10)$	$B(10, 5)$	$C(12, 3)$	$D(13, 0)$
Функция z_1	120	230	240	221
Функция z_2	50	55	51	39

Из таблицы видно, что максимальное значение $z_1 = 240$, а соответствующее ему оптимальное решение есть $C(12, 3)$; максимальное значение $z_2 = 55$ и соответствующее ему оптимальное решение есть $B(10, 5)$.

Окончательный выбор наилучшего решения за ЛПР.

2. Оптимальность по Парето. Это понятие является одним из важнейших во всей экономической теории. Вместе с тем в нем нет ничего, кроме здравого смысла. Продолжаем рассматривать многокритериальную задачу с m критериями $z_1, \dots, z_m$ и допустимым множеством D .

Принцип доминирования. Пусть X, Y — два допустимых решения, тогда X доминирует Y , если $z_i(X) \geq z_i(Y)$ для всех $i = 1, \dots, m$ и найдется такое k , что $z_k(X) > z_k(Y)$.

Если X доминирует Y , то ни при каком разумном подходе Y не может быть признано наилучшим решением.

Решение T называется *недоминируемым*, если нет решения X , которое доминировало бы T .

Следовательно, наилучшее решение надо искать среди недоминируемых. Этим и объясняется смысл следующего определения.

Определение. Множество недоминируемых решений называется *множеством Парето* или *множеством оптимальности по Парето*.

Итак, в задаче многокритериальной оптимизации наилучшее решение надо искать во множестве Парето.

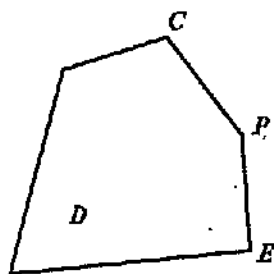


Рис. 2

Пример 2. Рассмотрим некоторое множество D на плоскости OXY . Оно называется игровым множеством. Два игрока играют в игру. Партия игры состоит в том, что они указывают совместно пару чисел (x, y) . Если эта точка попадает в множество D , то *первый* игрок получает сумму x , а *второй* — сумму y . Затем играется следующая партия и т.д. Каждый из игроков хочет выиграть как можно больше, но для этого они вынуждены взаимодействовать и играть совместно, обдумывая свои ходы.

Совершенно ясно, что точка (x', y') доминирует точку (x, y) , если $x' \geq x$, $y' \geq y$ и $x' > x$ или $y' > y$. Следовательно, для множества D , как видно из рис. 2, множество недоминируемых точек, или множество Парето, есть ломаная CPE .

Пример 3. Каково множество Парето в задаче из примера 1?

Решение. Чтобы проверить, будет ли точка A допустимого множества оптимальной по Парето, т.е. недоминируемой, надо проделать следующее. В данной ситуации — с линейными целевыми функциями — надо провести через исследуемую точку прямые M, K , перпендикулярные соответственно векторам $(17, 12)$ и $(3, 5)$ — градиентам целевых функций. Каждая такая прямая формирует две полуплоскости. Пусть $\tilde{M}$ и $\tilde{K}$ — те полуплоскости, которые лежат от своих прямых в направлении своего вектора. Если пересечение $\tilde{M} \cap \tilde{K}$ пересекается с допустимым множеством только по исследуемой точке, то она — оптимальная по Парето. Значит, в рассматриваемой задаче множество Парето есть отрезок BC .

3. Модель обмена, цены. Рассмотрим рынок, куда люди приходят со своими вещами в надежде обменять их. Это полностью натуральный рынок, никаких денег нет (в периоды сильной инфляции, в военное время такие рынки могут существовать некоторое время). Все ходят по рынку и приглядываются, как бы что поменять. Легко понять, что такие обмены могут оказаться чрезвычайно выгодными обеим меняющимся сторонам. Классический пример — когда дальзоркий и близорукий имеют каждый не те очки, какие надо, и в результате обмена получают ценнейшие для себя вещи!

Подчеркнем, что пока люди ходят и приглядываются, прищелкиваются, обговаривают условия обмена, но обмена пока не совершают. Происходит, таким образом, пока обмен информацией. При этом условия сделок, вообще говоря, меняются. Но вот к 17.00 все более или менее уже утряслось, условия сделок перестали меняться. Тогда совершаются все сделки, и люди расходятся.

Специально подчеркнем, что каждый совершает обмены исключительно в соответствии со своей системой предпочтений. Эти системы предпочтений или функции полезностей участников обменов и задают критерии оптимизации. Пусть u_i — функция полезности i -го участника. Получаем n -критериальную оптимизационную задачу, к которой приложимо понятие оптимальности по Парето (см. начало п. 2).

Ясно, что окончательное распределение оптимально по Парето по этим критериям (иначе соответствующий обмен был бы совершен!). Кроме того, ни для одного участника оно не хуже первоначального (ибо обмен был добровольным!).

Анализируя эту ситуацию, математики доказали, что в процессе обмена информацией между товарами возникнут особые пропорции, которые по существу являются ценами. Обязательно сложится такая система цен, что если каждый участник продаст свой первоначальный набор вещей по этим ценам, то на вырученные деньги он купит набор, являющийся наилучшим в смысле его системы предпочтений.

Далее не будем рассматривать общий случай, а ограничимся только двумя участниками обмена с двумя видами товаров.

4. Ящик Эджворта. Пусть u_i — функция полезности i -го участника. Обозначаем через w_i количество i -го товара у обоих участников. Пусть $X = (x_1, x_2)$ — собственность *первого*, тогда остальное количество товаров ($W - X$) находится у *второго*. Обозначим $X^0 = (x_1^0, x_2^0)$ начальную собственность *первого*, тогда $W - X^0$ есть начальная собственность *второго*. Но вообще, как легко видеть, по скольким участникам всего двое, то достаточно указать, сколько товаров у *первого*, тогда у *второго* все остальное.

Если все эти данные нанести на плоскую систему координат Ox_1x_2 , то как раз и получится ящик Эджворта. Произвольная точка (x_1, x_2) соответствует распределению товаров: столько у *первого* и остальное ($w_1 - x_1, w_2 - x_2$) — у *второго*. Сплошные кривые линии — это кривые безразличия *первого* (линии уровня его функции полезности u_1), пунктирные линии обозначают аналогичное для *второго* (рис. 3).

Ящик Эджворта позволяет ответить на вопрос: каково конечное распределение (т.е. после всевозможных обменов) для данного начального?

Посмотрев на точки A и B , видим, что B доминирует A , так как $u_1(B) > u_1(A)$ и $u_2(B) > u_2(A)$. Ясно поэтому, что если состоящие участники есть точка A , то они с охотой перейдут в точку B — для этого *первый* отдаст *второму* $a_2 - b_2$ единиц 2-го товара в обмен на $b_1 - a_1$ единиц 1-го товара.

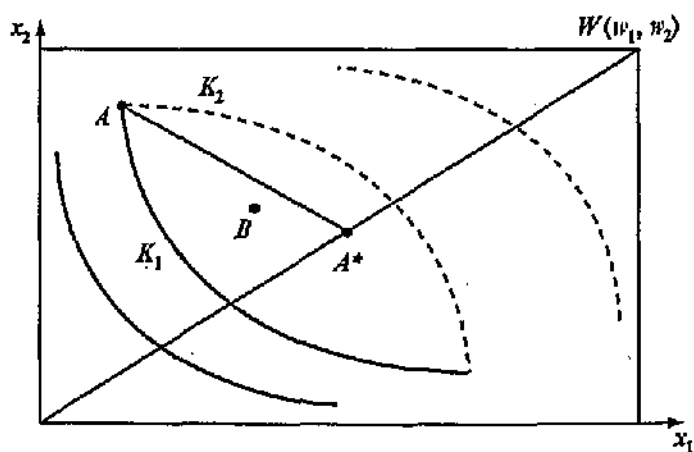


Рис. 3

Следовательно, если начальное состояние участников есть точка A , то конечным состоянием эта точка быть не может — ведь из теории (см. выше п. 3) известно, что окончательное распределение обязательно оптимально по Парето.

Как же узнать оптимальные по Парето точки в этом ящике Эджворта?

Рассмотрим произвольную точку C . Пусть $V_1(C) = \{K: u_1(K) \geq u_1(C)\}$ и $V_1^+(C) = \{K: u_1(K) > u_1(C)\}$, $V_2(C) = \{K: u_2(K) \geq u_2(C)\}$ и $V_2^+(C) = \{K: u_2(K) > u_2(C)\}$.

Очевидно следующее.

Предложение 1. Точка C оптимальна по Парето, если и только если оба множества $V_1^+(C) \cap V_2(C)$, $V_1(C) \cap V_2^+(C)$ пусты.

Если функции полезности «хорошие», например дифференцируемые, то справедливо следующее.

Предложение 2. Точка C является оптимальной по Парето, если кривые безразличия участников, проведенные через эту точку, имеют общую касательную.

Не будем доказывать это предложение, но воспользуемся им.

Пример 4. Пусть участники имеют одинаковые функции полезности $u_1 = u_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Найдём множество Парето. Как находить конечное распределение?

Для того чтобы кривые безразличия участников, проведенные через точку $T = (a, b)$, имели общую касательную, необходимо и достаточно, чтобы нормальные векторы к этим кривым были коллинеарны. Но нормальный вектор к кривой $\varphi(x_1, x_2) = c$ есть $(\partial\varphi/\partial x_1, \partial\varphi/\partial x_2)$.

Кривая безразличия *первого*, проходящая через точку (a, b) , имеет уравнение $x_1 x_2 = c_1$, где $c_1 = ab$. Кривая безразличия *второго*, проходящая через

эту же точку, имеет уравнение $(w_1 - x_1)(w_2 - x_2) = c_2$, где $c_2 = (w - a)(w - b)$. Нормальный вектор для первого есть (x_2, x_1) , т.е. (b, a) , для второго — $-(w_2 - x_2), -(w_1 - x_1)$, т.е. $-(w_2 - b), -(w_1 - a)$. Итак, векторы должны быть коллинеарны, т.е. $b/a = (w_2 - b)/(w_1 - a)$. Отсюда $b/a = w_2/w_1$, т.е. все точки, оптимальные по Парето, расположены на отрезке, соединяющем начало координат с точкой $W = (w_1, w_2)$ (см. рис. 3).

Следовательно, если X^0 — начальное распределение, то окончательное распределение, вообще говоря, не единственно. Множество конечных распределений находится так: проведя через точку начального состояния X кривые безразличия участников K_1 и K_2 , получаем «линзу» $K_1 K_2$. Пересечение этой линзы с отрезком OW и есть множество возможных конечных распределений (для данного начального).

Но еще не использована вся мощь теоремы, доказанной математиками (см. п. 3). В этой теореме речь шла о ценах, которые складываются в результате информационного обмена. В теореме утверждается, что для любого начального распределения: X^0 — у первого участника, остальное $(W - X^0)$ — у второго, сложатся такие цены $P = (p_1, p_2)$, что начальное и конечное Y распределения должны быть связаны еще и условием $PX^0 = PY$, $P(W - X^0) = P(W - Y)$. Такое состояние называется *равновесным*, а цены, а которых идет при этом речь, — *равновесными*.

Конечное равновесное распределение в примере 4 определяется очень просто. Именно для начального распределения — точки X^0 пусть P — цены равновесия и Y — сама точка равновесия. Тогда первый имеет доход $Q_1 = PX$ и в пределах этого дохода «купит» (обменяет) себе конечное распределение Y . Следовательно, конечное распределение Y должно быть точкой спроса для его функции полезности u_1 при ценах P и доходе Q_1 . В частности, должно быть $p_1/p_2 = u_2/u_1$ (это следует из характеристики точки спроса с такой функцией полезности — см. аналогичный пример 2 из раздела 9.1). Но уже известно, что для конечного распределения должно быть $u_2/u_1 = w_2/w_1$. Поэтому $p_1/p_2 = w_2/w_1$, так что $p_1 w_1 = p_2 w_2$. Итак, равновесные цены в рассматриваемом случае получаются обратно пропорциональными общему количеству товара на рынке; можно также сказать, что равновесные цены обеспечивают равенство стоимостей товаров на рынке.

Завершим рассмотрение примера. Поскольку $p_1/p_2 = w_2/w_1$, то для данного начального состояния, представленного, например, точкой A (см. рис. 3), конечное состояние находим так: проводим через точку A прямую линию, параллельную второй диагонали. Пересечение этой линии с первой диагональю и есть искоемое конечное равновесное состояние, представленное точкой A^* .

ЗАДАЧИ

1. В задачах многокритериальной оптимизации с несколькими целевыми функциями $f_1, \dots, f_m$ иногда поступают так: образуют новый критерий $f = c_1 f_1 + \dots + c_m f_m$, где c_i — некоторые числа, называемые весовыми коэффициентами или просто весами (если все целевые функции на максимум, то c_i положительны). Например, если f_i есть объем выпуска i -й продукции, то за c_i можно взять цены реализации и тогда f будет суммарной стоимостью всего выпуска.

Рассмотрим задачу ЛП с двумя целевыми функциями — объемами выпуска продукции.

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow \max, \\ x_2 &\rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 &\leq 18, \\ x_1 + x_2 &\leq 8, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Введем теперь цены реализации c_1 и c_2 и «свернем» два критерия в один — цена всего выпуска $c_1x_1 + c_2x_2$. Проследите, как меняется оптимальный выпуск и его цена в зависимости от цен c_1 и c_2 .

2. Пусть игроки играют в игру (см. пример 2). Найдите множество оптимальности по Парето для этой игры (игровое множество показано на рис. 4).

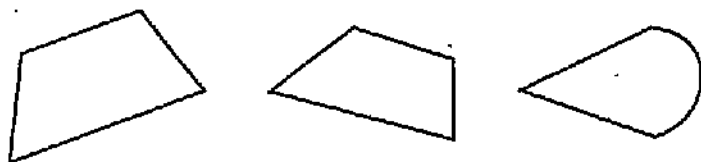


Рис. 4

3. Исследуйте ящик Эджворта для следующих пар функций полезности: а) $u_1 = u_2(x_1, x_2) = \min \{x_1, 2x_2\}$; б) $u_1 = u_2(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$; в) $u_1(x_1, x_2) = \min \{x_1, 2x_2\}$; $u_2(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$.

Тема 10.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

10.1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Интеграл — одно из важнейших математических понятий. Он широко применяется во всех областях науки, техники, экономики. Имеет мировоззренческое значение. Сначала рассмотрим его с чисто математической точки зрения.

1. Дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции. Как известно, *дифференцированием* называется отыскание производной данной, вообще говоря, произвольной функции. При этом производная имеет ясный механический смысл — если $s(t)$ есть зависимость пройденного пути от времени, то производная $s'(t)$ есть мгновенная скорость в момент t , производная же $(s'(t))'$, или 2-я производная $s''(t)$, есть ускорение в момент t .

Но можно поставить и обратную задачу: если известна зависимость ускорения $a(t)$ от времени, то как найти скорость в момент t ? Или если известна скорость в каждый момент времени, то каков будет пройденный путь?

С чисто математической точки зрения класс данных задач таков: известна функция $f(x)$, как найти функцию $F(x)$, производная $F'(x)$ которой есть $f(x)$?

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ или *интегралом* от $f(x)$, если $f(x)$ есть производная функции $F(x)$ — $f(x) = F'(x)$.

Отыскание для данной, вообще говоря, произвольной функции ее первообразной называется *интегрированием* (а весь комплекс связанных с этим вопросов — *интегральным исчислением*). Как видим, эта задача является обратной для дифференцирования.

Прямая задача:
дифференцирование
 $f(x) \rightarrow f'(x)$

Обратная задача:
интегрирование
 $f(x) = F'(x) \rightarrow F(x)$

Итак, если $F'(x) = f(x)$, то $f(x)$ есть производная функции $F(x)$, а функция $F(x)$ есть первообразная функция для $f(x)$. Однако вместе с $F(x)$ первообразной функцией для $f(x)$ будет и любая функция $F(x) + c$, где c — константа, так как $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$. Но можно доказать, что этим и исчерпываются все первообразные функции для данной функции $f(x)$, т.е. любая первообразная функция для $f(x)$ имеет вид $F(x) + c$, где $F(x)$ — какая-то первообразная. Следовательно, для разыскания всех первообразных функций для $f(x)$ достаточно найти какую-нибудь одну, все остальные получаются добавлением всевозможных констант.

В силу этого выражение $F(x) + c$, где c — произвольная константа, а $F(x)$ — какая-то первообразная функция для $f(x)$, представляет собой общий вид функции, которая имеет производную $f(x)$. Это выражение называется *неопределенным интегралом* $f(x)$ (или от $f(x)$) и обозначается $\int f(x) dx$; произведение $f(x) dx$ называется *подынтегральным выражением*, а $f(x)$ — *подынтегральной функцией*.

Пример 1. Так как $(x^3)' = 3x^2$, то $\int 3x^2 dx = x^3 + c$; так как $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$, то $\int \cos 2x dx = 0,5\sin 2x + c$; $\int e^x dx = e^x + c$.

Отметим еще раз: непосредственно из определения неопределенного интеграла следует, что производная от него есть подынтегральная функция, т.е.

$$\left(\int f(x) dx\right)' = f(x). \quad (1)$$

Далее, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $dF(x) = f(x)dx$, так что можно писать $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x)dx$. С другой стороны, $\int dF(x) = F(x) + c$, так что знаки «d» и « $\int$ », поставленные последовательно, почти сокращают друг друга.

Пример 2. С использованием знака интеграла теперь можно записать, что $s(t) = \int v(t) dt$ и $v(t) = \int a(t) dt$. Проанализируем равноускоренное прямолинейное движение. Например, под действием силы тяжести, когда $a(t) = \text{const} = g$. Тогда $v(t) = gt + c$, где c — произвольная константа. Следовательно, данных пока недостаточно для определения скорости. Это ясно и из физических соображений. Чтобы фиксировать какое-то значение v , надо знать скорость в какой-то момент. Пусть $v(t_0) = v_0$, тогда $v(t) = v_0 + gt$. Следовательно, $c = v_0 - gt_0$ и получаем такой закон изменения скорости от времени: $v(t) = g(t - t_0) + v_0$. Поскольку $s(t) = \int v(t) dt = \int (g(t - t_0) + v_0) dt = g(t - t_0)^2/2 + v_0(t - t_0) + s_0$. Опять-таки c можно найти, задав значение пройденного пути в какой-то момент времени; пусть, например, $s(t_0) = s_0$, тогда $c = s_0 - v_0 t_0$ и окончательно получаем: $s(t) = g(t - t_0)^2/2 + v_0(t - t_0) + s_0$. Значения v_0, s_0 условно называются начальными значениями скорости и пути в момент t_0 .

В общем виде для выбора конкретной первообразной можно указать значение F_0 , которое она должна принять при $x = x_0$. Если $F(x) + c$ — неопределенный интеграл для $f(x)$, т.е. семейство всех первообразных, то, полагая $F(x_0) + c = F_0$, получаем $c = F_0 - F(x_0)$ и $F(x) + (F_0 - F(x_0))$ — та самая конкретная первообразная, которая в точке x_0 принимает значение F_0 .

Пример 3. Определить первообразную для $2x$, которая равна 4 при $x = 2$.

Так как $\int 2x dx = x^2 + c$, то, полагая $2^2 + c = 4$, получаем $c = 0$. Значит, искомая первообразная есть x^2 .

Часто уточняют понятие первообразной, говоря, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (интервале и т.п.), если $F'(x) = f(x)$ во всякой точке этого отрезка (в концевых точках речь идет, конечно, об односторонних производных).

2. Геометрическое понимание интеграла. Рассмотрим в промежутке $[a, b]$ непрерывную функцию $y = f(x)$, принимающую лишь неотрицательные значения. Рассмотрим фигуру $ADCB$ (рис. 1), ограниченную кривой $f(x)$, двумя вертикальными прямыми: $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси OX , т.е. $ADCB$ — криволинейная трапеция. Изучим поведение площади переменной фигуры $ADNM$, заключенной между постоянной вертикальной прямой $x = a$ и вертикальной прямой, отвечающей произвольно выбранному в промежутке значению x . При изменении x эта площадь будет изменяться, являясь функцией от x ; обозначим эту функцию $P(x)$.

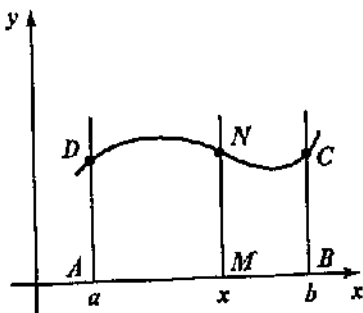


Рис. 1

Найдем производную этой функции. Действуя по общему правилу, придадим x некоторое приращение Δx ; тогда площадь P получит приращение ΔP .

Пусть m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ в промежутке $[x, x + \Delta x]$, тогда $m \cdot \Delta x \leq \Delta P \leq M \cdot \Delta x$, откуда $m \leq \Delta P / \Delta x \leq M$. При $\Delta x \rightarrow 0$, в силу непрерывности $f(x)$, m и M будут стремиться к $f(x)$, а тогда и $\Delta P / \Delta x \rightarrow f(x)$. Следовательно, $P'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta P / \Delta x = f(x)$.

Таким образом, справедлива замечательная теорема, обычно называемая теоремой Ньютона–Лейбница: производная от переменной площади $P(x)$ по абсциссе x равна ординате $y = f(x)$.

Иными словами, переменная площадь $P(x)$ есть первообразная функция для данной функции $f(x)$. Из других первообразных она отличается тем, что $P(a) = 0$. Любая другая первообразная $F(x)$ для $f(x)$ отличается от $P(x)$ только на константу.

Следовательно, площадь криволинейной трапеции $ADCB$ равна $P(b) = P(b) - P(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ — какая угодно первообразная для $f(x)$.

Пример 4. Найдем площадь $P(x)$ фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью OY и вертикальной прямой с абсциссой x (рис. 2).

Для функции x^2 первообразная есть, например, $x^3/3$, следовательно, искомая площадь равна $P(x) = x^3/3 - 0 = x^3/3$.

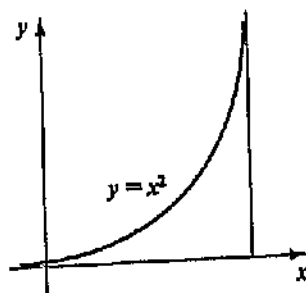


Рис. 2

Повторим еще раз: для непрерывной функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, вполне правильно понимать первообразную как переменную площадь $P(x)$ криволинейной трапеции (см. рис. 1).

Еще одно геометрическое понимание интеграла состоит в следующем. Как известно, значение производной в точке есть тангенс угла наклона касательной (п. 1, раздел 5.1). Поэтому найти для функции $f(x)$ первообразную, значит, найти такую функцию $F(x)$, касательная к графику которой в точке x имеет тангенс угла наклона $f(x)$.

3. Таблица основных интегралов. Каждая формула дифференциального исчисления, устанавливающая, что для некоторой функции $F(x)$ производная есть $f(x)$, дает и формулу интегрального исчисления:

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Возьмем следующие формулы дифференцирования (п. 3, раздел 5.1):

1) $C' = 0$;	2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;	3) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;
4) $(e^x)' = e^x$;	5) $(\ln x)' = 1/x$;	6) $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$;
7) $(\sin x)' = \cos x$;	8) $(\cos x)' = -\sin x$;	9) $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$;
10) $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$.		

Используя их, получим следующие правила интегрирования (с небольшими естественными изменениями):

1) $\int 0 \cdot dx = c$;	
2) $\int x^\alpha dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + c$ (предполагается $\alpha \neq -1$);	
3) $\int a^x dx = a^x/\ln a + c$;	4) $\int e^x dx = e^x + c$;
5) $\int 1/x \cdot dx = \ln x + c$;	6) $\int 1/x dx = \log_a x \cdot \ln a$;
7) $\int \cos x \cdot dx = \sin x + c$;	8) $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + c$;
9) $\int 1/\cos^2 x \cdot dx = \operatorname{tg} x + c$;	10) $\int 1/\sin^2 x \cdot dx = -\operatorname{ctg} x + c$.

К этим формулам добавим еще четыре, требующихся довольно часто:

- | |
|---|
| 11) $\int dx/(1+x^2) = \operatorname{arctg} x + c$; |
| 12) $\int dx/(1-x^2) = (1/2) \ln (1+x)/(1-x) + c$; |
| 13) $\int dx/\sqrt{1-x^2} = \arcsin x + c$; |
| 14) $\int dx/\sqrt{x^2+1} = \ln x + \sqrt{x^2+1} + c$. |

При использовании этих формул полезно, «мысленно» дифференцируя, подбирать соответствующие интегралы, особенно коэффициенты пропорциональности в них.

Пример 5. а) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx$. Применяя формулу (2), получим $1/(3/2) \cdot x^{3/2} + c = (2/3)x^{3/2} + c$; б) $\int e^{2x} dx = (1/3)e^{2x} + c$.

4. Простейшие правила интегрирования.

1. Если k — постоянная и $k \neq 0$, то $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$.

Действительно, согласно правилам дифференцирования, производная правой части равна $(k \int f(x) dx)' = k f(x)$, что и требовалось доказать. Таким образом, постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла.

2. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

Опять дифференцируя выражение справа, получаем подынтегральную функцию слева, что и требовалось доказать. Следовательно, неопределенный интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций.

3. Если $\int f(x) dx = F(x) + c$, то $\int f(ax + b) dx = (1/a)F(ax + b) + c$.

Действительно, исходное соотношение означает, что $F'(x) = f(x)$. Но тогда $((1/a)F(ax + b) + c)' = F'(ax + b) = f(ax + b)$, что и требовалось доказать.

В частном случае, когда $a = 1$ или $b = 0$, имеем $\int f(x + b) dx = F(x + b) + c$, $\int f(ax) dx = (1/a)F(ax) + c$.

Пример 4. Вычислим несколько интегралов, пользуясь только что изложенными правилами:

$$а) \int (6x^2 - 3x + 5) dx = \int 6x^2 dx - \int 3x dx + \int 5 dx = 2x^3 - (3/2)x^2 + 5x + c;$$

$$б) \int \sin^2 x dx = \int ((1 - \cos 2x)/2) dx = x/2 - (1/4)\sin 2x + c;$$

$$в) \int (1 - x)(2 + x) dx = \int (2 - x - x^2) dx = 2x - x^2/2 - x^3/3 + c;$$

$$г) \int ((x + 1)/\sqrt{x}) dx = \int \sqrt{x} dx + \int dx/\sqrt{x} = (2/3)x^{3/2} + 2\sqrt{x} + c.$$

5. Интегрирование путем замены переменной. В основе этого метода лежит следующее замечание.

Замечание. Если $\int g(t) dt = G(t) + c$, то

$$\int g(p(z)) p'(z) dz = G(p(z)) + c. \quad (2)$$

Действительно, это прямо вытекает из правила дифференцирования сложной функции: $(G(p(z)) + c)' = G'(p(z)) \cdot p'(z) = g(p(z)) \cdot p'(z)$.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(z) dz$. Если удастся в качестве новой переменной выбрать от z такую функцию: $t = p(z)$, чтобы подынтегральное выражение приняло вид $f(z) dz = g(p(z)) \cdot p'(z) dz$, где $g(t)$ — более удобная для интегрирования функция. Тогда, как указано выше, достаточно найти интеграл $\int g(t) dt = G(t) + c$, чтобы из него подстановкой $t = p(z)$ получить искомый интеграл. Обычно пишут просто $\int f(z) dz = \int g(t) dt$, подразумевая, что в функции от t в интеграле справа указанная замена произведена.

Найдем, например, интеграл $\int \sin^2 z \cdot \cos z \cdot dz$. Так как $d(\sin z) = \cos z dz$, то, полагая $t = \sin z$, получим интеграл $\int t^2 dt$. Этот интеграл равен $t^3/3$. Теперь остается вернуться к переменной z , подставляя $\sin z$ вместо t . Получим $\sin^3 z/3$.

6. Интегрирование по частям. Пусть $u = f(x)$, $v = g(x)$ — функции от x , имеющие непрерывные производные $u' = f'(x)$ и $v' = g'(x)$. Тогда по правилу дифференцирования произведения $d(uv) = u dv + v du$ или $u dv = d(uv) - v du$. Имеем $u dv = d(uv) - v du$, и так как $\int d(uv) = uv$, то окончательно

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (3)$$

Эта формула выражает правило интегрирования по частям.

Пусть, например, требуется найти интеграл $\int x \cdot \cos x \cdot dx$. Положим, $u = x$, $\cos x \cdot dx = d(\sin x)$, тогда $du = dx$, $v = \sin x$. По формуле (3) имеем: $\int x \cdot \cos x \cdot dx = x \sin x - \int \sin x \cdot dx = x \cdot \sin x + \cos x + c$.

Заметим, наконец, что существует еще много формул и приемов интегрирования различных функций и составлены весьма обширные таблицы интегралов, т.е. первообразных.

ЗАДАЧИ

Пользуясь таблицей простейших интегралов, найдите интегралы:

1. $\int (2x + 1)^2 dx$ (возведите сначала выражение в скобках в квадрат).
2. $\int (2 - x^2)^2 dx$ (аналогично).

3. $\int (1 + x^2)/x \cdot dx$ (сначала почленно поделите).
4. $\int x^2 dx/(1 + x)^2$ (преобразуйте так: $x^2/(1 + x^2) = (x^2 + 1 - 1)/(1 + x^2) = 1 - 1/(1 + x^2)$ и т.д.).
5. $\int x^2 dx/(1 - x^2)$ (аналогично 4).
6. $\int (x^2 + 3) dx/(x^2 - 1)$ (аналогично 4).
7. $\int (1 + \sin x - \cos x) dx$.
8. Используя правило 3 из п. 4, найдите интегралы:
 $\int dx/(x + a)$; $\int (2x - 3)^{10} dx$; $\int dx/(2 + 3x^2)$; $\int dx/(2 - 3x^2)$.
9. Используя замену переменной (см. п. 5), найдите интегралы:
 $\int x^2 dx/\sqrt{1 - x^2}$; $\int x^2 \sqrt[3]{1 + x^3} dx$; $\int x dx/(3 - 2x^2)$; $\int x dx/(1 + x^2)^2$;
 $\int x^3 dx/(x^3 - 2)$; $\int x e^{-x^2} dx$; $\int e^x dx/(2 + e^x)$; $\int dx/(e^x + e^{-x})$.
10. Применяя интегрирование по частям (см. п. 6), найдите интегралы:
 $\int \ln x \cdot dx$; $\int x \cdot e^{-x} dx$; $\int x \cdot \cos x \cdot dx$; $\int \arcsin x \cdot dx$.

10.2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

1. **Площадь криволинейной трапеции.** Вернемся к задаче определения площади криволинейной трапеции (см. п. 2 раздела 10.1).

Пусть на промежутке $[a, b]$ определена неотрицательная функция $y = f(x)$. Рассмотрим фигуру $ADCB$ (рис. 1), ограниченную кривой $f(x)$, двумя вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси OX , т.е. криволинейную трапецию.

Разделим основание AB трапеции на несколько частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и проведем в точках деления вертикальные отрезки. В результате трапеция разделится на несколько полосок (см. рис. 1). Заменяем каждую полоску прямоугольником с тем же основанием и высотой, совпадающей с одной из ординат полоски, например с самой левой. Сама криволинейная трапеция заменится при этом ступенчатой фигурой, составленной из прямоугольников. Тогда площадь полоски окажется при-

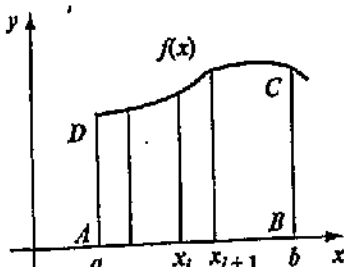


Рис. 1

ближенно равной площади заменяющего ее прямоугольника, а площадь всей трапеции — площади этой ступенчатой фигуры.

Основание i -го прямоугольника равно $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, так что его площадь равна $f(x_i)\Delta x_i$, а площадь всей ступенчатой фигуры равна

$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$. Итак, площадь S самой криволинейной трапеции прибли-

женно равна $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$.

При безграничном убывании всех Δx_i к нулю погрешность этого равенства также стремится к нулю и точное значение площади S получается как предел

$$\lim \sum f(x_i)\Delta x_i \quad (1)$$

при стремлении всех Δx_i к нулю.

Для обозначения сумм вида $\sum f \cdot \Delta x$ (вернее, их пределов) и введен был символ $\int f(x)dx$. Так как площадь, представляющая это предельное значение, есть в то же время и первообразная для функции $f(x)$, см. п. 2 раздела 10.1, то этим же символом стали обозначать и первообразную функцию для $f(x)$. Чтобы подчеркнуть, что речь идет

о площади трапеции от a до b , стали писать $\int_a^b f(x)dx$.

Само существование площади трапеции $ADCB$ также связывают с существованием предела (1). Можно придумать такие сложные функции $f(x)$, что предела (1) для них не существует. В этом случае говорят, что трапеция $ADCB$ не имеет площади — интуитивно можно представить причину в том, что функция $f(x)$ очень резко меняет свои значения — «прыгает» вверх и вниз, и ее график не тонкая кривая, а фактически «заметает» целую полосу.

2. Определение определенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ задана в некотором отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок несколькими точками на части. Пусть эти точки есть $a < x_0 < \dots < x_n = b$. Обозначим наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ через λ .

Выберем в каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ произвольную точку ξ_i

и составим сумму $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Говорят, что сумма σ (являясь, понятно, переменной величиной) при $\lambda \rightarrow 0$ имеет предел S , если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется

такое $\delta > 0$, что как только λ становится меньше δ (т.е. промежуток $[a, b]$ разбит на части с длинами, меньшими δ), неравенство $|S - \sigma| < \varepsilon$ выполняется при любом выборе чисел ξ_i .

Записывают это так: $S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$.

Определение. Если предел S суммы σ при $\lambda \rightarrow 0$ существует, то он называется определенным интегралом функции $f(x)$ в проме-

жутке от a до b и обозначается $\int_a^b f(x) dx$. Сама функция $f(x)$ при этом называется интегрируемой на промежутке $[a, b]$.

При этом числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интеграла. При фиксированных пределах определенный интеграл есть постоянное число.

Это определение определенного интеграла принадлежит Риману, из-за чего этот интеграл и называется римановым. Существуют и другие конструкции интегралов. Нам они не понадобятся.

Описанная схема определения определенного интеграла используется для его приближенного вычисления. Отрезок интегрирования проходится с каким-то шагом h и находится значение суммы $\sum f(\xi_i)h$.

Это и есть приближенное значение интеграла $\int_a^b f(x) dx$. Для получения более точного значения надо уменьшить шаг h .

3. Свойства определенного интеграла. Некоторые из этих свойств примем без доказательства.

1. Интегрируемая функция necessarily ограничена (на промежутке интегрирования).

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ не ограничена. Тогда, каковы бы ни были малы промежутки деления $[x_i, x_{i+1}]$ на каком-то из них, например $[x_i, x_{i+1}]$, функция не ограничена. Значит, она принимает на этом промежутке сколь угодно большие значения. Следовательно, величина $f(\xi_i)\Delta x_i$ может быть сколь угодно большой за счет выбора точки ξ_i в этом промежутке. Значит, и сумма σ может быть сделана сколь угодно большой и потому она не имеет (конечного) предела.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$, то она интегрируема, т.е. определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует (см. ниже теорему 3).

3. Если обе функции f, g интегрируемы в промежутке $[a, b]$, то их сумма, разность и произведение также интегрируемы, кроме того,

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

4. Если ограниченная на промежутке функция имеет лишь конечное или счетное число точек разрыва, то она интегрируема на этом промежутке.

5. Монотонная, ограниченная на промежутке функция интегрируема на этом промежутке.

Это потому, что такая функция имеет счетное число точек разрыва (см. п. 4).

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема на любом меньшем промежутке; если $f(x)$ интегрируема на каждом из промежутков $[a, c]$, $[c, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

7. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $a < b$. Тогда:

а) если $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$; б) если $f(x) > 0$, то $\int_a^b f(x)dx > 0$, в) при перемене пределов интегрирования интеграл меняет знак; г) если

функция $f(x) \geq 0$ на $[a, c]$ и $f(x) \leq 0$ на $[c, b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b |f(x)|dx$.

Некоторые свойства интегралов очень естественны.

8. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $a < b$ и $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Доказательство. Легко видеть, что какое бы ни было разбиение отрезка $[a, b]$ на частичные промежутки, верно двойное неравенство:

$$m(b-a) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \leq M(b-a), \text{ откуда и вытекает указанное неравенство.}$$

9. Если обе функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, $a < b$ и

$$f(x) \leq g(x), \text{ то } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

4. Теорема о среднем значении. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, $a < b$ и $m \leq f(x) \leq M$, то существует такое μ , при котором $m \leq \mu \leq M$

$$\text{и } \int_a^b f(x) dx = \mu(b-a).$$

Доказательство. В соответствии со свойством 8 имеем:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \text{ Разделив все части неравенства на}$$

$$(b-a), \text{ получим } m \leq [1/(b-a)] \cdot \int_a^b f(x) dx \leq M. \text{ Приняв } [1/(b-a)] \cdot \int_a^b f(x) dx \text{ за } \mu, \text{ получим требуемое: } \int_a^b f(x) dx = \mu(b-a).$$

$$\text{При } a > b \text{ доказательство несколько сложнее и его приводить не будем.}$$

5. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a, b]$, то она интегрируема в любом промежутке $[a, x]$, где $a \leq x \leq b$ (см. свойство 6 в п. 3), т.е.

для любого такого x интеграл $\int_a^x f(t) dt$ существует; обозначив его $P(x)$,

получим функцию $P(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Теорема 1. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $P(x)$ непрерывна в этом промежутке.

Доказательство. Придав x произвольное приращение h (с тем лишь, чтобы $x + h$ не вышло за пределы $[a, b]$), получим новое зна-

чение функции: $P(x + h) = \int_a^{x+h} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt$, так что $P(x + h) - P(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$.

По свойству 8 (п. 3) имеем $\int_x^{x+h} f(t) dt = \mu \cdot h$, где μ содержится между

нижней и верхней точными границами значений функции $f(x)$ на промежутке $[x, x + h]$, а тем более между нижней и верхней точными границами значений функции $f(x)$ на всем промежутке $[a, b]$. Отсюда следует, что $\mu \cdot h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, а это и означает непрерывность функции $P(x)$ в рассматриваемой точке x .

Теорему 1 можно дополнить.

Теорема 2. Если функцию $f(x)$ предположить непрерывной в точке $d \in [a, b]$, то в этой точке функция $P(x)$ имеет производную, равную $f(d)$.

Доказательство. Имеем $P(d + h) - P(d) = \mu \cdot h$ (см. доказательство теоремы 1). Но ясно, что по непрерывности функции $f(x)$ в точке d $\mu \rightarrow f(d)$ при $h \rightarrow 0$, следовательно, и $\lim_{h \rightarrow 0} (P(d + h) - P(d))/h = P'(d) = f(d)$.

Выход из этой теоремы сформулируем как самостоятельное утверждение.

Теорема 3. Если $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, то интеграл

с переменным верхним пределом $P(x) = \int_a^x f(t) dt$ есть первообразная для $f(x)$ на этом промежутке.

Таким образом, для непрерывной функции основная задача интегрального исчисления — нахождение первообразной, всегда имеет решение.

Замечание. Существуют функции, не имеющие первообразной. Такова, например, функция «знак(сигнум)»

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Эта функция не может быть производной никакой функции, так как производная обладает свойством принимать все промежуточные значения, а данная функция не принимает, скажем, значения $1/2$.

Таким образом, указание на непрерывность функции в теореме 3 является существенным.

6. Основная формула интегрального исчисления. Как только что установлено (теорема 3), для непрерывной на промежутке $[a, b]$ функции $f(x)$ интеграл с переменным верхним пределом $P(x) = \int_a^x f(t) dt$ есть

первообразная для $f(x)$. Пусть $F(x)$ — любая первообразная для $f(x)$, тогда $F(x) = P(x) + c$ (см. п. 1 раздела 10.1). Постоянную c легко определить, ибо $P(a) = 0$, а значит, $c = F(a)$, откуда $F(x) = F(a) +$

$\int_a^x f(t) dt$. Окончательно: $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ или

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Это основная формула интегрального исчисления.

Значение определенного интеграла $\int_a^b f(t) dt$ выражается разностью двух значений: при $x = a$ и $x = b$ любой первообразной подынтегральной функции.

Эта формула дает эффективное и простое средство для вычисления определенного интеграла от непрерывной функции. Ведь для многих функций возможно выразить первообразную через элементарные функции. В этих случаях определенный интеграл вычисляется

ся непосредственно по основной формуле (2). Разность $F(b) - F(a)$ обычно изображают символом $F(x) \Big|_a^b$, а формулу (2) пишут в виде

$$\int_a^b f(t) dt = F(x) \Big|_a^b. \quad (3)$$

В частности, возвращаясь к площади криволинейной трапеции (см. рис. 1), получаем окончательно, что ее площадь $S = \int_a^b f(t) dt = F(x) \Big|_a^b$, где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для $f(x)$.

Пример 1. Применяя основную формулу интегрального исчисления, найти интегралы и нарисовать соответствующие криволинейные трапеции:

а) $\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx$; б) $\int_0^\pi \sin x \cdot dx$; в) $\int_0^{\sqrt{3}} dx/(1+x^2)$.

Решение. Имеем: а) $\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx = \int_0^8 x^{1/3} \cdot dx = (3/4) \cdot x^{4/3} \Big|_0^8 = (3/4) \cdot 8^{4/3} = 12$;

б) $\int_0^\pi \sin x \cdot dx = (-\cos x) \Big|_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2$; в) $\int_0^{\sqrt{3}} dx/(1+x^2) = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi/3 - 0 = \pi/3$.

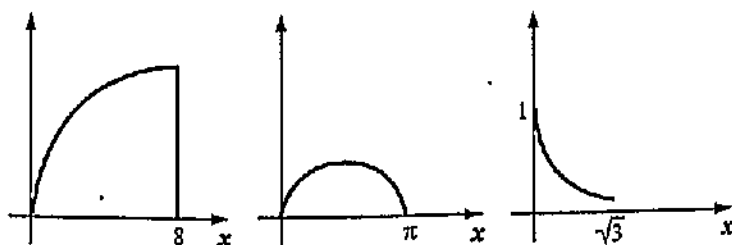


Рис. 2

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, то, как следует из теоремы 3, она имеет первообразную. На-

пример, такой первообразной является интеграл $\int_a^x f(t) dt$. Но повсе не

обязательно, что эта (и любая другая) первообразная может как-то выражаться через элементарные функции. Например, функция $f(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$, играющая исключительно важную роль в теории вероятностей, имеет первообразную, потому что она сама непрерывна.

Эта первообразная есть, например, $\Phi(x) = \int_0^x (1/\sqrt{2\pi})e^{-t^2/2}dt$, но она не

выражается каким-либо способом через элементарные функции. Тем не менее эта функция, известная как функция Лапласа, хорошо изучена, в частности существуют подробные таблицы ее значений.

7. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном

интеграле. Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$. Положим $x = \varphi(t)$, подчинив функцию $\varphi(t)$ условиям:

- $\varphi'(t)$ определена и непрерывна в некотором промежутке $[\alpha, \beta]$ и не выходит за пределы промежутка $[a, b]$, когда t изменяется в промежутке $[\alpha, \beta]$;
- $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$;
- существует в промежутке $[\alpha, \beta]$ непрерывная производная $\varphi'(t)$.

Тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt. \quad (4)$$

Пример 2. Найдем интеграл $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$ с помощью подстанов-

ки $x = a \sin t$; здесь $\alpha = 0$ и $\beta = \pi/2$. Имеем: $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot dt =$

$$= (a^2/2)(t + \sin 2t/2) \Big|_0^{\pi/2} = \pi a^2/4.$$

Что касается интегрирования по частям, то при тех же условиях, при каких справедливо интегрирование по частям в неопределенном интеграле (см. п. 6 раздела 10.1), имеем:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (5)$$

Эта формула выражает правило интегрирования по частям в определенном интеграле.

ЗАДАЧИ

1. Найти интегралы: а) $\int_{-1}^2 x^2 dx$; б) $\int_0^2 |1-x| dx$; в) $\int_{-1/2}^{1/2} dx/\sqrt{1-x^2}$;

г) $\int_0^4 (x^2 - x) dx$; д) $\int_1^4 dx/\sqrt{x}$.

2. Используя замену переменной, найти интегралы:

а) $\int_1^4 x dx/\sqrt{5-x}$; б) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$; в) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$;

г) $\int_1^3 x dx/\sqrt{3+x^2} dx$.

3. Применяя интегрирование по частям, найти интегралы:

а) $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$; б) $\int_0^{\pi} x \cdot \sin x \cdot dx$; в) $\int_0^{2\pi} x^2 \cdot \cos x \cdot dx$.

4. Пусть функция $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, а функция $f(t)$ непрерывна. Исходя из геометрического понимания интеграла, докажите, что $F(x)$

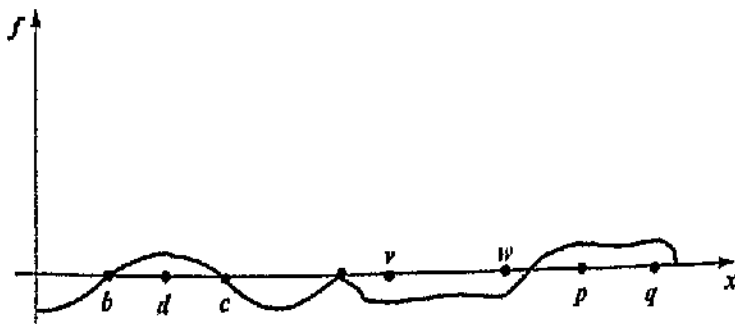


Рис. 3

имеет в точке b минимум, в точке c максимум, а в точке d перегиб (рис. 3). График $F(x)$ на отрезке $[p, q]$ есть поднимающаяся наклонная прямая, а на отрезке $[v, w]$ — опускающаяся наклонная прямая.

5. Докажите, что функция Лапласа $\Phi(x) = \int_0^x (1/\sqrt{2\pi}) e^{-t^2/2} dt$ (не

выражающаяся в элементарных функциях) нечетная и строго возрастающая.

10.3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Длина кривой, площадь фигуры и объем тела. Теория пределов, дифференциальное и интегральное исчисления позволяют математически строго определить понятие длины кривой, площади фигуры, объема тела и выразить или доказать их основные свойства. Начнем с площади фигуры.

Будем считать известным, что такое площадь прямоугольника, треугольника и вообще многоугольника.

Возьмем теперь на плоскости произвольную плоскую фигуру (P) , представляющую собой ограниченную замкнутую область. Ее границу, или контур, будем представлять себе в виде замкнутой кривой или нескольких таких кривых.

Станем рассматривать всевозможные многоугольники (A) , целиком содержащиеся в фигуре (P) , и многоугольники (B) , целиком в себе содержащие фигуру (P) . Если A и B означают соответственно их площади, то всегда $A \leq B$. Так как всякая площадь A ограничена сверху, например любой площадью B , то множество площадей $\{A\}$ имеет точную верхнюю границу, которую обозначим P^* . Точно так же множество площадей $\{B\}$ имеет точную нижнюю границу P_* .

Определение. Если обе границы $P_* = \sup \{A\}$ и $P^* = \inf \{B\}$ совпадают, то это их общее значение P называется площадью фигуры (P) .

Опираясь на это определение, можно доказать следующее фундаментальное свойство площади: если плоская область (P) разбита на две части (P_1) и (P_2) , то $P = P_1 + P_2$ при условии, что два числа из этих трех P, P_1, P_2 существуют (т.е. либо вся область (P) и какая-нибудь из частей $(P_1), (P_2)$ имеют площади, либо обе части $(P_1), (P_2)$ имеют площади).

Это свойство площади называется *аддитивностью*. Оно может быть распространено на любое конечное число частей. Из этого свойства вытекает также, что площадь части плоской фигуры меньше площади всей фигуры.

Для случая криволинейной трапеции (см. п. 2 раздела 10.1 и п. 1 раздела 10.2) это определение площади опять приводит к определенному интегралу: площадь криволинейной трапеции (рис. 1, а) равна

$$\int_a^b f(x) dx.$$

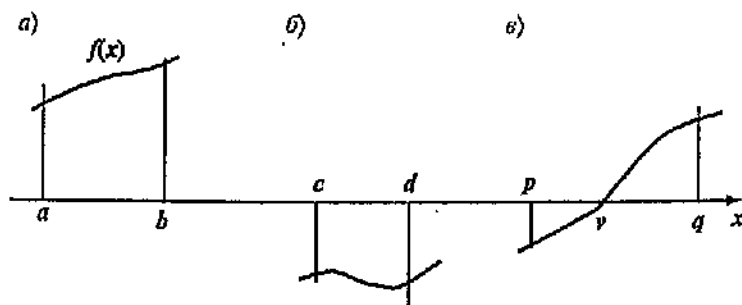


Рис. 1

Если трапеция расположена вся под осью абсцисс (рис. 1, б),

т.е. когда $f(x) \leq 0$ на $[c, d]$, то значение интеграла $\int_c^d f(x) dx$ будет отрицательно и по абсолютной величине даст значение площади этой трапеции. В общем случае, $\int_p^q f(x) dx$ дает алгебраическое значение площади криволинейной трапеции: площади участков выше оси абсцисс входят со знаком «плюс», а площади участков под осью абсцисс входят со знаком «минус» (рис. 1, в) (см. также свойство 7 определенного интеграла из п. 3 раздела 10.2).

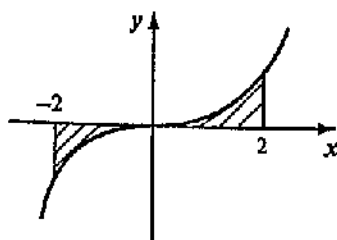


Рис. 2

Пример 1. Найти площадь заштрихованной фигуры, если кривая задана уравнением $y = x^3$ (рис. 2).

Вычисление. Искомая площадь равна
$$-\int_{-2}^0 x^3 dx + \int_0^2 x^3 dx = -x^4/4 \Big|_{-2}^0 + x^4/4 \Big|_0^2 = 4 + 4 = 8.$$

Подобные рассуждения приводят к следующей формуле для площади фигуры, заданной в полярных координатах.

Площадь P сектора AOB (рис. 3), ограниченного лучами OA и OB ($\alpha = \angle AOx$, $\beta = \angle BOx$) и непрерывной

кривой $\rho = \varphi(\Theta)$, равна $(1/2) \int_{\alpha}^{\beta} (\varphi(\Theta))^2 d\Theta$.

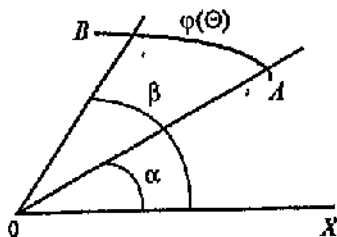


Рис. 3

Примерно так же можно подойти к строгому определению объема тела.

Будем считать известным, что такое площадь прямоугольного параллелепипеда, призмы и вообще многогранного тела или многогранника.

Возьмем теперь произвольное тело (V) в пространстве, представляющее собой ограниченную замкнутую область.

Станем рассматривать всевозможные многогранные тела — многогранники (K) , целиком содержащиеся в (V) , и многогранники (L) , целиком в себе содержащие (V) . Если K и L означают соответственно их объемы, то всегда $K \leq L$. Так как всякий объем K ограничен сверху, например любым объемом L , то множество объемов (K) имеет точную верхнюю границу, которую обозначим V_* . Точно так же множество объемов (L) имеет точную нижнюю границу V^* .

Определение. Если обе границы V_* и V^* совпадают, то это их общее значение V называется объемом тела (V) .

Опираясь на это определение, можно доказать аддитивность объема, а также то, что объем части тела меньше объема всего тела.

Замечание. К подобным «доказательствам» аддитивности объема или площади нужно относиться снисходительно, как к оправданиям математиков, что введенное ими понятие действительно отражает реальность.

Для вычисления объемов тел также можно использовать определенный интеграл. В полной мере это будет сделано в следующем разделе. Пока же, исключительно для иллюстрации, ограничимся простым примером.

Пример 2. Найти объем тела, ограниченного поверхностью вращения кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox и плоскостями $x = a$ и $x = b$ (рис. 4).

Решение. Разобьем отрезок AB произвольно на части точками $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Как легко видеть, объем V тела вращения (V) , который мы

ищем, приближенно равен $\sum_{i=0}^{n-1} \pi (f(x_i))^2 \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

При все более мелком дроблении отрезка AB предел этой суммы есть интеграл $\int_a^b \pi (f(x))^2 dx$, который и есть искомый объем.

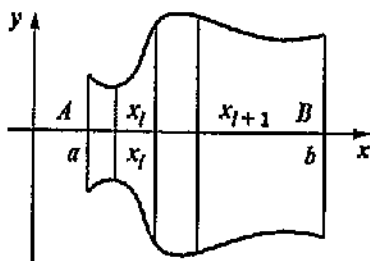


Рис. 4

Например, если $y = kx$, $k > 0$, $a = 0$, $b = h$, то получаем $\int_0^h \pi(kx)^2 dx = \pi k^2 x^3 / 3 \Big|_0^h = \pi k^2 h^3 / 3 = (\pi/3)(kh)^2 h = (\pi/3)r^2 h$. Это и есть объем прямого кругового конуса высотой h и радиусом основания $r = kh$.

Наконец, о длине кривой. Длина кривой определяется как верхняя грань длин ломаных, вписанных в эту кривую. Эта верхняя грань может быть определена как некоторый определенный интеграл наподобие того, как выражаются определенными интегралами площадь фигуры и объем тела.

2. Механические и физические приложения. Эти приложения, хотя и имеют принципиальный характер (выражающийся в том, что обойтись в этих приложениях без интегралов невозможно), все же довольно специфичны и для экономистов мало интересны. Ограничимся лишь следующей иллюстрацией.

Напомним, что скорость есть интеграл от ускорения, а пройденный телом путь есть интеграл от скорости. Скорость автомобиля можно определить по скорости вращения его колес. А как определить скорость самолета? По «свисту» воздуха за бортом? Как ни удивительно, в принципе так. По сопротивлению этого воздуха. А ракета в безвоздушном пространстве? Известно, например, что многие ракеты автономны в полете. Как определить их скорость и местоположение? Они имеют внутри себя гироскопы — вращающиеся волчки. Ось волчка стремится сохранить свое направление в пространстве, поэтому если ракета летит с ускорением, то волчок «улавливает» его. Интегрированием ускорения во времени находится скорость ракеты, а последующим интегрированием скорости определяется местоположение ракеты.

Разумеется, в длительном космическом полете можно как-то ориентироваться по планетам, звездам и т.п.

3. Экономические и другие иллюстрации к понятию интеграла. Воспользуемся геометрическим пониманием интеграла.

А, 100-ваттная электролампочка в квартире за час свечения потребляет 0,1 кВт · ч, за два часа 0,2 кВт · ч и т.д. За сутки она много раз включается и выключается, поэтому подсчитать расход электроэнергии через нее напрямую затруднительно. А ведь в квартире с десяток лампочек, есть электроплита, работает телевизор и т.п.

Установленная электрическая мощность потребителей сильно меняется в течение суток (рис. 5, а).

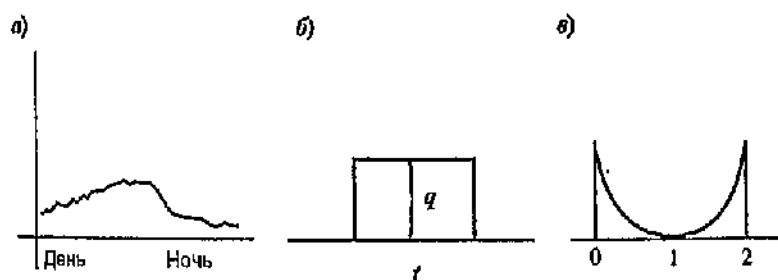


Рис. 5

Как подсчитать расход электроэнергии за сутки? Так как в простейшем случае — при постоянной мощности q потребителей — расход энергии за время t равен произведению qt , т.е. площади прямоугольника (рис. 5, б), то при переменной во времени мощности потребления $q(t)$ расход энергии за время от a до b можно отождествить с площадью криволинейной трапеции (рис. 5, а). Но эта площадь

равна $\int_a^b q(t) dt = F(b) - F(a)$, где $F(t)$ — какая-нибудь первообразная для $q(t)$.

Пусть, например, $q(t) = (t - 1)^2$ (см. рис. 5, в), т.е. потребление энергии сначала падает, а потом опять возрастает. Для этой функции первообразной является, например, функция $(t - 1)^3/3$, следовательно, искомый расход электроэнергии за время от 0 до 2 равен

$$\left. (t - 1)^3/3 \right|_0^2 = 2/3.$$

В реальности роль первообразной исполняет электрический счетчик. Скорость вращения колесика электросчетчика пропорциональна суммарной мощности $q(t)$ всех включенных в этот момент в квартире электрических устройств. График изменения этой скорости во времени подобен кривой $q(t)$, т.е. во сколько-нибудь раз выше или ниже; поэтому счетчик суммирует нарастающим итогом расход электроэнергии в квартире и, как и для настоящей первообразной, расход электроэнергии за месяц равен разности показаний счетчика.

Б. Абсолютно так же водомерный счетчик суммирует нарастающим итогом расход воды всем заводом. Главной деталью такого счетчика является турбинка с лопаточками, скорость вращения которой пропорциональна скорости текущей по трубе воды. Но ясно, что мгновенный расход воды через заданное поперечное сечение трубы

(где установлен счетчик) пропорционален скорости течения этой воды (далее см. рассуждения про электрический счетчик).

В. Среди приборов автомобиля есть спидометр. Это обычно комбинированный прибор, состоящий фактически из двух приборов: собственно спидометра, т.е. показывающего скорость автомобиля в данный момент, и второго прибора, показывающего, сколько километров автомобиль наездил с начала эксплуатации. Назовем его счетчиком километража. Показания этого счетчика есть первообразная для скорости автомобиля, как функции времени. Из других первообразных эта выделяется тем, что в начале эксплуатации она равна нулю. Чтобы полнее убедиться во всем этом, подумайте, каковы бы были показания второго прибора, если бы автомобиль ездил только с одной и той же постоянной скоростью. Чем бы можно было заменить оба прибора?

Г. На заряд q в электрическом поле напряженности E действует сила Eq . Если масса заряда m , то он движется с ускорением $a = qE/m$. Если напряженность поля меняется, то и ускорение меняется. Движение заряда в этом случае носит сложный характер. Для расчетов необходимо использование интегралов.

Д. Скорость роста населения страны зависит от многочисленных факторов — самой численности населения, жизненного уровня, традиций и т.п. Для расчетов используется сложный математический аппарат, в том числе дифференциальные уравнения и интегралы.

Е. На нефтяном месторождении функционирует много скважин. Режим работы их различен (некоторые простаивают в ремонте и т.п.), поэтому мощность всего месторождения (дебит месторождения) меняется во времени, есть функция $q(t)$. Тогда за время от a до b место-

рождение даст $\int_a^b q(t)dt$ нефти.

В общем виде можно отметить, что если $p(t)$ есть мгновенная мощность производства, то $\int_a^b p(t)dt$ даст выпуск продукции за время от a до b .

Ж. Пусть на складе хранится запас какого-то расходуемого товара (например, цемента). Пусть издержки хранения одной единицы товара в течение одной единицы времени равны h . Если запас товара на складе есть функция времени $f(t)$, то издержки хранения за время

от a до b составят $\int_a^b hf(t)dt$. Такая ситуация рассматривалась в п. 2

раздела 6.1 под названием «формула Уилсона». При рассмотрении был принят без обсуждения следующий факт: при равномерном раскодировании запасов от Q до нуля за время T издержки хранения можно подсчитывать как $hQT/2$. Докажем это.

В данном случае $f(t) = Q - Q \cdot t/T$, так что $\int_0^T h f(t) dt = [h(Qt - (Q/T)t^2/2)] \Big|_0^T = h(QT - (Q/T)T^2/2) = h(QT - QT/2) = hQT/2$, что и требовалось доказать.

Отметим, что если график изменения запасов во времени есть ломаная линия, то без интегрирования можно обойтись: надо работать со средними значениями.

3. Интересной иллюстрацией возможности применения интегралов для анализа социально-экономического строения общества является так называемая «диаграмма или кривая Джинни» распределения богатства в обществе.

Рассмотрим функцию $d(z)$, которая сообщает, что z -я часть самых бедных людей общества владеет $d(z)$ -й частью всего общественного богатства (рис. 6). Если бы распределение богатства было равномерным, то график функции $d(z)$ шел бы по диагонали квадрата. Поэтому чем больше площадь заштрихованной линзы, тем неравномернее распределено богатство в обществе. Величина этой площади называется также «коэффициентом Джинни».

Можно придумать много аналогичных характеристик; например, для оценки распределения заработной платы в фирме или акций среди сотрудников и т.п. Соответствующие функции Джинни наверняка будут довольно сложными и без интегралов не обойтись.

И. Экономисты выделяют два вида величин: потоки и стоки, которые анализируются парами. Например, касса предприятия каждый день составляет отчет: сколько выдано и сколько принято денег. Рассмотренная как ежедневная эта величина есть поток. А кассовый отчет за месяц есть уже величина-сток. С математической точки зрения величины-поток есть мгновенные скорости изменения величин-стоков, и наоборот, величины-стоки — это интегралы от величин-потоков за какое-то время, иногда с переменным верхним пределом.

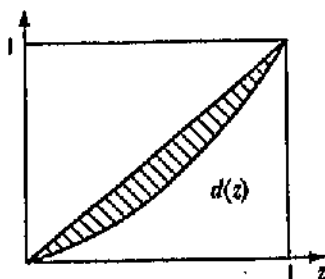


Рис. 6

Так, в примерах А, Б, Е (см. выше) мгновенные значения мощности включенных в квартире электрических устройств, дебет мосторождения, мгновенный расход воды есть величины-потоки, а расход электричества или воды за месяц или количество добытой за месяц нефти есть величины-стоки.

И вообще, мгновенная мощность производства есть потоковая величина, а выпуск продукции за какое-то время есть стоковая величина.

Предположим, что y — это величина, являющаяся функцией времени, а $F(a, b)$ — величина, являющаяся функцией временного промежутка. Предположим, что если на промежутке $[a, b]$ величина y постоянна, то $F(a, b) = y(b - a)$. Тогда весьма часто $F(a, b) = \int_a^b y(t)dt$ и y, F — пара величин (y — потоковая, F — стоковая).

К. Велика в экономике и роль средних величин. Напомним, что среднее значение величины x , изменяющейся по времени по закону

$x(t)$ на промежутке $[a, b]$, есть $[1/(b - a)] \cdot \int_a^b x(t)dt$. По своему смыслу

среднее значение есть интегральная характеристика и широко применяется для характеристики поведения величины «в целом», на всем промежутке.

ЗАДАЧИ

1. Выведите известные из школьной программы формулы для площади круга, кругового сектора и сегмента круга с помощью формулы для площади в полярных координатах (см. п. 1).

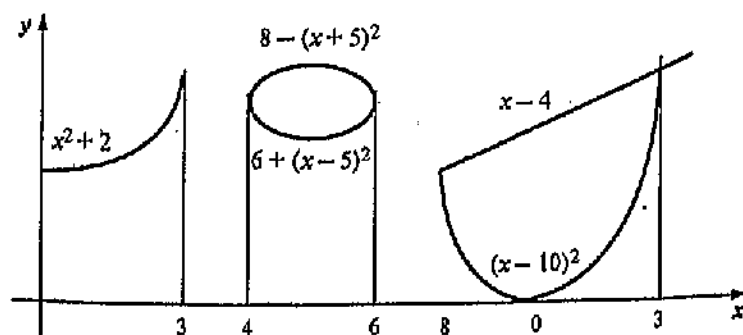


Рис. 7

2. Выведите известные из школьной программы формулы для объема пирамиды, усеченной пирамиды, кругового конуса и усеченного конуса (см. также п. 1).

3. Найдите площади фигур (рис. 7).

4. Найдите площади фигур (рис. 8), заданных в полярной системе координат: а) $r^2 = \cos 2\varphi$ — лемниската; б) $r = 1 + \cos \varphi$ — кардиоида; в) $r = \sin 3\varphi$ — трилистник.

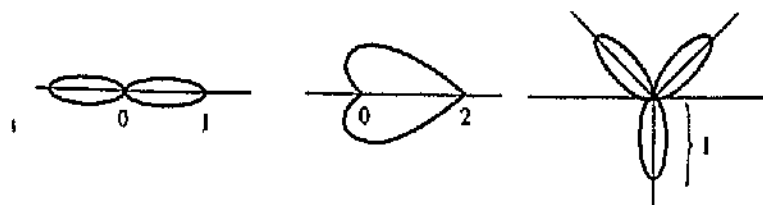


Рис. 8

5. И электрический счетчик электроэнергии, и автомобильный счетчик километража имеют шкалу какой-то величины. Например, счетчик километража обнуляется после 100 000 км. Каковы после этого «взаимоотношения» между спидометром и этим счетчиком?

6. В большинстве моделей «Жигулей», кроме счетчика километража, есть еще один счетчик (тоже километража), который водитель может в любой момент обнулить. Каковы «взаимоотношения» между спидометром и этим счетчиком?

7. Электрический счетчик электроэнергии, водомерный и автомобильный счетчики километража являются примерами приборов-интеграторов или сумматоров. Приведите еще примеры таких интеграторов.

С помощью электрического счетчика можно было бы создать универсальный интегратор. Примем, что скорость вращения счетчика прямо пропорциональна величине текущего через счетчик тока. Пусть требуется создать интегратор какой-то величины x , являющейся функцией времени $x(t)$. Создадим промежуточный прибор, который по x вырабатывает ток, пропорциональный x : $i = kx$, где k — какая-то константа. Ток i создает поле, вращающее колесико счетчи-

ка. Тогда показания F счетчика будут $F(T) = \int_0^T i(t) dt$, где 0 — начало

работы счетчика. Ясно, что с точностью до константы k показания счетчика есть первообразная для $x(t)$. С помощью подходящей шкалы счетчика его показания можно сделать настоящей первообразной.

8. На рис. 9 приведены графики функций спроса D и предложения S в зависимости от цены p . Какой экономический смысл можно придать заштрихованным площадям или соответствующим интегралам?

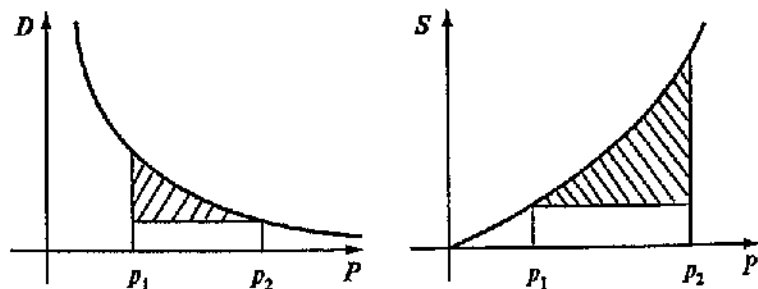


Рис. 9

9. Найдите коэффициент Джинни распределения богатства в обществе, если функция Джинни есть x^2 , x^3 .

10. Известная задача (автор узнал о ней от В.В. Ясько): человек несет на плеч небольшое деревце с отпиленными корнем и ветвями. Какая часть больше весит: корневая или верхушечная?

Тема 11.

НЕСОБСТВЕННЫЕ И КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

11.1. НЕСОБСТВЕННЫЕ И КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. **Определение интегралов с бесконечными пределами.** В разделах 10.1—10.3 были изучены определенные интегралы для случая конечного промежутка и ограниченной в этом промежутке функции. Несобственные интегралы представляют собой обобщение указанного понятия интеграла на случай бесконечного промежутка и неограниченной функции. Начнем с интегралов на бесконечном промежутке.

Пусть $f(x)$ определена в промежутке $[a, \infty)$ и интегрируема в любой его конечной части $[a, A]$, так что интеграл $\int_a^A f(x) dx$ существует

при любом $A \geq a$.

Если предел этого интеграла при $A \rightarrow \infty$ существует (конечный или бесконечный), то его называют несобственным интегралом

функции $f(x)$ от a до ∞ и обозначают $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Подчеркнем еще раз, что

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx. \quad (1)$$

Если предел конечен, то говорят, что интеграл (1) сходится, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в бесконечном промежутке $[a, \infty)$. Если же предел (1) бесконечен или предела нет, то говорят, что интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл $\int_{-\infty}^a f(x) dx$, как

предел $\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx$. Интеграл же $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ можно определить так:

возьмем любое число a и если оба несобственных интеграла

$\int_{-\infty}^a$ и $\int_a^{\infty}$ существуют, то существует и $\int_{-\infty}^{\infty}$, который равен их сумме.

Пример 1. Какую минимальную скорость вертикально вверх надо сообщить телу у поверхности Земли, чтобы оно не вернулось на Землю?

Решение. Земля имеет форму шара радиусом $r \approx 6371$ км. Сила земного притяжения, которую надо преодолевать телу массой m , у поверхности Земли равна $F(r) = gm$, где $g = 9,8$ м/с², а на высоте h над поверхностью Земли эта сила равна $F(r+h) = gmr^2/(r+h)^2$. Чтобы тело не вернулось, надо удалить его в бесконечность, для чего совершить работу, равную интегралу

$\int_0^H F(r+h) dh$. Для нахождения этого интеграла найдем интеграл $\int_0^H$, а затем

устремим H в бесконечность. Имеем: $\int_0^H gmr^2/(r+h)^2 dh = gmr^2(-1/(r+h)) \Big|_0^H = gmr^2(1/r - 1/(r+H)) = gmHr/(r+H)$. При $H \rightarrow \infty$ предел этого выражения равен $gm r$. Это потенциальная энергия. Если ее пересчитать в кинетическую по формуле $gm r = (1/2)mv^2$, то получим $v = \sqrt{2gr} \approx 11,17$ км/с. Это и есть ответ.

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Рассмотрим теперь функцию $f(x)$, заданную в конечном промежутке $[a, b]$, но не ограниченную в этом промежутке. Предположим, в частности, что в любом промежутке $[a, b - \varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < b - a$, функция $f(x)$ ограничена и интегрируема, но в остатке $[b - \varepsilon, b]$ функция неограниченна. Точка b называется *особой точкой*.

Предел интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (конечный или бесконечный) называется несобственным интегралом функции $f(x)$ от a до b и обозначается, как обычно, $\int_a^b f(x)dx$.

Подчеркнем еще раз, что

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \quad (2)$$

Если предел конечен, то говорят, что интеграл (2) сходится, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в промежутке $[a, b]$. Если же предел (2) бесконечен или предела нет, то говорят, что интеграл (2) расходится.

Пример 2. Функция $1/\sqrt{1-x^2}$ интегрируема в любом промежутке $[0, 1 - \varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < 1$) и $\int_0^{1-\varepsilon} dx/\sqrt{1-x^2} = \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \arcsin(1 - \varepsilon)$. Так как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin(1 - \varepsilon) = \arcsin 1 = \pi/2$, то исследуемый несобственный интеграл равен $\pi/2$.

3. Двойные интегралы, определение. Задача нахождения площади криволинейной трапеции (см. п. 2 раздела 10.1 и п. 1 раздела 10.2) приводит к понятию простого (или одномерного) определенного интеграла, а к двойному интегралу приводит задача нахождения объема цилиндрического бруса. Рассмотрим тело (V), которое сверху ограничено поверхностью $z = f(x, y)$, с боков — цилиндрической поверхностью с вертикальными образующими и снизу — плоской фигурой (P) на плоскости xy (рис. 1). Требуется найти объем этого тела. Для этого разложим область (P) сетью кривых на части ($P_1, \dots, P_n$) и рассмотрим ряд цилиндрических столбиков, которые имеют своими основаниями эти части и в совокупности составляют данное тело.

В каждой части (P_i) возьмем по точке (x_i, y_i) , тогда объем столбика с основанием (P_i) приближенно равен $f(x_i, y_i)P_i$ (напомним, что P_i обозначает площадь части (P_i) фигуры (P)), а объем всего тела (V) приближенно равен

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)P_i.$$

Для повышения точности этого равенства будем уменьшать размеры частей (P) , увеличивая их число. В пределе, при стремлении наибольшего из диаметров всех частей (P_i) к нулю, это равенство становится точным, так

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)P_i$$

Предел этого вида и называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области (P) ; он обозначается символом $\iint_{(P)} f(x, y) dP$, так

$$V = \iint_{(P)} f(x, y) dP.$$

Видно, что двойной интеграл есть прямое обобщение обычного интеграла по промежутку на случай двух переменных.

Двойной интеграл используется и для нахождения площади поверхности. Пусть поверхность задана как поверхность функции $f(x, y)$, заданной на плоской области (P) . Если функция и область достаточно «хорошие», то площадь поверхности можно вычислить с помощью некоторого двойного интеграла.

4. Сведение двойного интеграла к повторному. Это сведение применяется для вычисления двойного интеграла.

Рассмотрим опять цилиндрический брус (рис. 1), только сейчас область (P) на плоскости имеет вид, как на рис. 2, т.е. ограничена снизу кривой $y_1(x)$ и сверху кривой $y_2(x)$, а с боков — вертикальными линиями $x = a$ и $x = b$.

Теорема. Если для функции $f(x, y)$, определенной в области (P) , существует

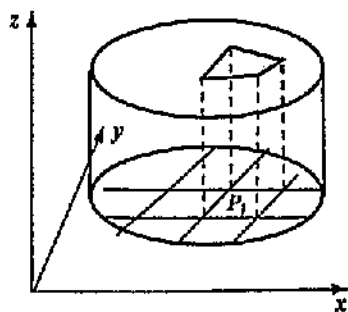


Рис. 1

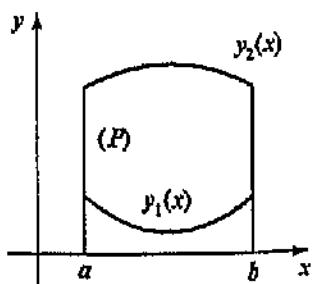


Рис. 2

двойной интеграл $\iint_{(P)} f(x, y) dP$ и при каждом значении $x \in [a, b]$ суще-

ствует простой интеграл $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, то $\iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$.

При этом интеграл $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ называется повторным.

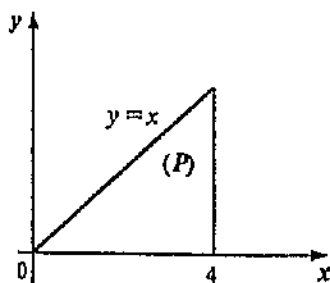


Рис. 3

Пример 3. Найти объем цилиндра, стоящего на плоской области (P) (рис. 3) и имеющего «крышу» $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Решение. Искомый объем V есть двойной интеграл $\iint_{(P)} f(x, y) dP$. Сведем его к повтор-

ному $\int_0^4 dx \int_0^x (x^2 + y^2) dy$. Внутренний интеграл равен $(x^2 y + y^3/3) \Big|_0^x = (4/3) \cdot x^3$, следовательно,

но, искомый объем равен $\int_0^4 (4/3) x^3 dx = x^4/3 \Big|_0^4 = 256/3$.

5. Тройные интегралы. К понятию тройного интеграла приводит задача нахождения массы неоднородного по плотности тела. Рассмотрим тело объемом (V) , плотность которого $f(m)$ в точках тела не является постоянной величиной. Требуется найти массу M этого тела.

Для этого разложим объем (V) тела на ряд частей $(V_1), \dots, (V_n)$, в сумме составляющих данное тело. В каждой части (V_i) возьмем по точке m_i , тогда масса части приближенно равна $f(m_i) V_i$ (напомним, что V обозначает объем части (V) , а масса всего тела приближенно

равна $\sum_{i=1}^n f(m_i) V_i$

Для повышения точности этого равенства будем уменьшать размеры частей (V_i) , увеличивая их число. В пределе, при стремлении наибольшего из диаметров всех частей (V_i) к нулю это равенство ста-

новится точным, так что $M = \lim \sum_{i=1}^n f(m_i) V_i$

Предел этого вида и называется тройным интегралом от функции $f(m)$ по области (телу) (V) ; он обозначается символом $\iiint\limits_{(V)} f(m) dV$,

так что формула для массы тела принимает вид

$$M = \iiint\limits_{(V)} f(m) dV. \quad (3)$$

Тройной интеграл, как и двойной, есть прямое обобщение обычного интеграла по промежутку, только на случай трех переменных.

Для вычисления тройной интеграл сводят к повторному обычному, в котором внутренний интеграл является двойным, или к повторному двойному, в котором внутренний интеграл является простым. Возможны, впрочем, и другие способы вычисления тройного интеграла.

Пример 4. Найти массу цилиндра-тела из примера 3 с плотностью $f(x, y, z) = x + y + z$.

Решение. Искомая масса равна $\iiint\limits_{(V)} f(m) dV$. Сведем этот интеграл к повторному $\iint\limits_{(P)} dP \cdot \int\limits_u^{x^2+y^2} (x+y+z) dz$. Внутренний интеграл равен $I(x, y) = y^4/2 + y^3 + y^2(x+x^2) + yx^2 + x^3$. Осталось вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(P)} I(x, y) dP$. Сведем его к повторному: $\int_0^4 dx \int_0^x I(x, y) dy$. Найдем внутренний интеграл: $\int_0^x (y^4/2 + y^3 + y^2(x+x^2) + yx^2 + x^3) dy = (y^5/10 + y^4/4 + (x+x^2)y^3/3 + xy^2/2 + yx^3) \Big|_0^x = (x^5/10 + x^4/4 + (x+x^2)x^3/3 + xx^2/2 + xx^3) = (x^5/10 + x^5/3) + (x^4/4 + x^4/3 + x^4) + x^5/2 = (13/30)x^5 + (19/12)x^4 + (1/2)x^5 = K(x)$. Наконец, $\int_0^4 K(x) dx = [(13/180)x^6 + (19/60)x^5 + (1/8)x^6] \Big|_0^4 = \dots = 652,1$.

ЗАДАЧИ

1. Средним значением функции $f(x)$ на интервале $[0, \infty]$ называется число $\lim_{A \rightarrow \infty} 1/A \int_0^A f(x) dx$. Найдите среднее значение на таком

интервале функции $\sin x$. Можно ли для этой функции найти это среднее значение по-другому?

2. Найдите такое a , что $\int_0^{\infty} a e^{-x} dx = 1$,

3. Примите к сведению, что $\int_0^{\infty} (1/\sqrt{2\pi}) e^{-x^2/2} dx = 1/2$ и нарисуйте

примерный график функции Лапласа (см. п. 6 и задачу 5 из раздела 10.2).

4. Найдите объем цилиндра-тела, стоящего на плоской области и имеющего «крышу», затем найдите массу этого тела с плотностью, показанной на рис. 4.

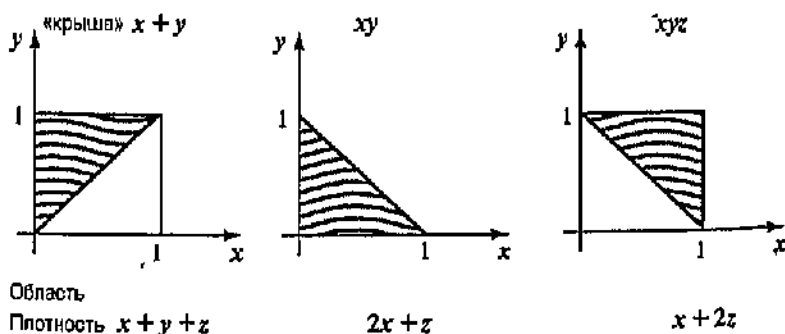


Рис. 4

5. Вычислите двойной интеграл $\iint_{(P)} (x^2 + y^2) dP$, где область интегрирования (P) есть круг радиусом 4 с центром в начале координат

6. Вычислите тройной интеграл $\iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dV$, где область интегрирования (V) есть шар радиуса 8 с центром в начале координат.

7. Найдите массу шара радиуса r , плотность которого равномерно падает от максимальной D в центре шара до минимальной d на его поверхности.

8. Пусть $f(x, y) = g(x)h(y)$. Убедитесь,

$$\text{что } \iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy \text{ (рис. 5).}$$

Сформулируйте соответствующее утверждение для тройного интеграла.

9. Упавший в море самолет лежит горизонтально на дне. Как подсчитать силу давления на него воды (что может понадобиться для оценки возможности его подъема)?

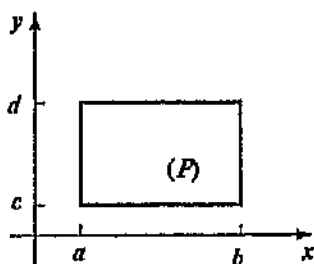


Рис. 5

Тема 12.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

12.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. **Определение дифференциального уравнения.** Дифференциальным уравнением называется всякое соотношение между независимыми переменными, функцией от них и производными этой функции по этим переменным. Если независимая переменная одна и производные, следовательно, обыкновенные, то и уравнение называется *обыкновенным дифференциальным*. Будем изучать только такие уравнения и потому слово «обыкновенное» в названии дифференциального уравнения опустим. Наивысший порядок входящих в уравнение производных называется порядком уравнения. Итак, общий вид дифференциального уравнения n -го порядка есть

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

где y есть функция от x , а $y', \dots, y^{(n)}$ — производные этой функции.

Функция $y(x)$ называется решением дифференциального уравнения (1), если при подстановке ее и ее производных получается тождество.

Пример 1. $y' = 2x$ есть пример дифференциального уравнения 1-го порядка. Решением этого уравнения является любая функция $y(x) = x^2 + c$, где c — константа. Проверить это можно вычислив производную от $y = x^2 + c$ и подставив ее значение в уравнение.

Пример 2. $y'' + y = 0$ есть пример дифференциального уравнения 2-го порядка. Решением этого уравнения является, например, функция $y(x) = \cos x$. Проверить это можно, вычислив 2-ю производную от $\cos x$ и подставив ее в уравнение.

Как и в случае обычного уравнения, главное в теории дифференциальных уравнений — это отыскание всех решений данного дифференциального уравнения. Нахождение решений дифференциального уравнения называется интегрированием этого уравнения.

Компактная запись всех решений уравнения называется его общим решением. Например, в примере 1 общее решение имеет вид $y(x) = x^2 + c$, где c — произвольная константа, при различных значениях этой константы получаются частные решения уравнения. В примере 2 было указано только одно частное решение уравнения. Обычно при решении дифференциального уравнения требуется отыскать некоторое частное решение, удовлетворяющее каким-то дополнительным данным. Например, требуется отыскать решение — функцию $y(x)$, такую что $y(x_0) = y_0$. Такого рода дополнительные данные называются начальными условиями.

В рассмотренных примерах решения уравнения были найдены очень просто, однако для более сложных уравнений приходится применять приближенные методы интегрирования, используя компьютеры.

К дифференциальным относятся также уравнения, связывающие дифференциалы независимой переменной и функции от нее. Например, $2dx + 3dy = 0$ есть пример дифференциального уравнения.

2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. К дифференциальным уравнениям приводят многие вопросы естествознания. Рассмотрим несколько примеров.

А. Движение тела с заданной зависимостью скорости от времени. Допустим, что в каждый момент времени скорость точки, движущейся по оси x , есть $v(t)$, причем v непрерывна. Кроме того, известно, что в момент t_0 точка имела абсциссу x_0 . Нужно найти закон движения точки, т.е. зависимость ее абсциссы x от времени. Решение этой задачи несложно — ведь скорость изменения абсциссы, т.е. производная $x'(t)$, и есть скорость. Получаем дифференциальное уравнение $x'(t) = v(t)$. Решить это дифференциальное уравнение — это найти первообразную для $v(t)$. Поскольку $v(t)$ непрерывна, то первообразная существует (см. п. 5 раздела 10.2) и может быть записана в

виде интеграла $\int_{t_0}^t v(t) dt$ плюс константа c , которую легко определить,

ибо $x(t_0) = x_0$, значит, $c = x_0$. Окончательно получаем решение диф-

ференциального уравнения: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$.

Б. Движение фондов. Обозначим через K величину фондов в натуральном или стоимостном выражении. Фонды — это станки, помещения и т.п. Все это ломается, изнашивается, стареет и т.д. Про этот процесс говорят, что фонды выбывают. Скорость выбытия фондов выражают через коэффициент выбытия. Так, если за 10 лет фонды полностью обновляются, то коэффициент выбытия равен $1/10$. Обозначим коэффициент выбытия через μ . Итак, выбытие ведет к уменьшению фондов за год на величину μK , а за время Δt на величину $\mu K \Delta t$ (считаем, что выбытие фондов происходит равномерно). С другой стороны, инвестиции — вложения денег — ведут к увеличению фондов. Предположим, что инвестиции в размере I за год дадут увеличение фондов на величину ρI (можно было бы считать, что $\rho = 1$, но часть инвестиций идет на зарплату проектировщикам, строителям, т.е. не на прямое увеличение (фондов), тогда за время Δt инвестиции при их равномерном вложении дадут увеличение фондов на величину $\rho I \Delta t$.

Рассмотрим произвольный момент времени t и его приращение Δt . Тогда имеем $K(t + \Delta t) = K(t) - \mu K \Delta t + \rho I \Delta t$ и, устремляя Δt к нулю, получим дифференциальное уравнение $dK/dt = -\mu K + \rho I$. Подчеркнем, что I — константа.

В. Демографическая задача. Обозначим население страны в момент t через $L(t)$. Представляется естественным предположение, что увеличение населения за время Δt пропорционально численности населения L и Δt , тогда $L(t + \Delta t) = L(t) + \alpha L(t) \Delta t$. Устремляя Δt к нулю, получим дифференциальное уравнение $dL/dt = \alpha L(t)$. Можно догадаться, что его общее решение есть $L(t) = L_0 e^{\alpha t}$, где L_0 — численность населения в момент 0 (начало наблюдения). Такой закон роста населения называется *экспоненциальным* (рис. 1). Ясно, однако, что он не может продолжаться сколько-нибудь длительное время — включаются противодействующие механизмы: снижение жизненного уровня, меры по ограничению рождаемости и т.п., и рост населения затормозится.

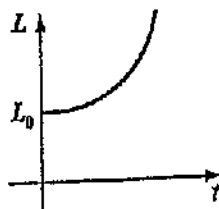


Рис. 1

3. Уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной. Дифференциальное уравнение 1-го порядка часто можно разрешить относительно производной и представить в виде $y' = f(x, y)$. Если $f(x, y)$ в действительности зависит только от x , то получается уравнение $y' = f(x)$. Следовательно, если $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, например, если $f(x)$ непрерывна, то указанное дифференциальное уравнение имеет общее решение $y = F(x) + c$.

Для нахождения конкретного решения постоянная c может быть определена из его начального условия $y(x_0) = y_0$ и тогда это конкретное решение есть

$$y(x) = F(x) + (y_0 - F(x_0)). \quad (2)$$

Что же касается общего случая, т.е. уравнения $y' = f(x, y)$, то при некоторых ограничениях, налагаемых на функцию $f(x, y)$, это уравнение для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ имеет единственное решение, а его общее решение зависит от одной произвольной постоянной.

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения $y' = e^x$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

Решение. Так как для функции e^x первообразной является, например, функция e^x , то согласно (2) искомое решение есть $y(x) = e^x + (1 - e^0) = e^x$.

4. Уравнения с разделяющимися переменными. Дифференциальные уравнения вида

$$f(y)dy + g(x)dx = 0 \quad (3)$$

называются уравнениями с разделенными переменными, а уравнение, которое можно привести к такому виду, называется уравнением с разделяющимися переменными. Функции $f(y)$ и $g(x)$ будем считать непрерывными.

Предположим, что $y(x)$ является решением этого уравнения, тогда при подстановке $y(x)$ в него получим тождество, интегрируя которое, имеем

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + c. \quad (4)$$

Этому тождеству удовлетворяют все решения уравнения (3). Верно и обратное: если некоторая функция $y(x)$ обращает уравнение (4) в тождество, то, дифференцируя уравнение (4), обнаружим, что эта функция есть решение исходного уравнения (3). Все это оправдывает следующее определение.

Определение. Уравнение $\Phi(x, y) = 0$, которое определяет решение $y(x)$ дифференциального уравнения как неявную функцию x , называется *интегралом дифференциального уравнения*. Если же это со-

отношение определяет все без исключения решения данного дифференциального уравнения, то оно называется общим интегралом этого уравнения. Итак, уравнение (4) есть общий интеграл дифференциального уравнения (3).

Вполне возможно, что неопределенные интегралы $\int f(y)dy$, $\int g(x)dx$ не выражаются в элементарных функциях, но даже и в этом случае задачу интегрирования дифференциального уравнения (3) считают выполненной, так как она сведена к более простой и изученной задаче нахождения неопределенного интеграла.

Частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, определяют из уравнения $y_0 + \int_{y_0}^y f(y)dy = x_0 + \int_{x_0}^x g(x)dx$.

Пример 4. Решить уравнение $x dx + y dy = 0$.

Переменные разделены, так как коэффициент при dx есть функция x , а коэффициент при dy есть функция y . Интегрируя, получим $\int x dx + \int y dy = c$ или $x^2 + y^2 = c^2$. Получили семейство концентрических окружностей с центром в начале координат.

Классическим примером дифференциального уравнения с разделяющимися переменными является уравнение распада радиоактивного вещества. Дифференциальное уравнение такого процесса есть $dx/dt = -kx$, $k > 0$, через $x(t)$ обозначено количество радиоактивного вещества в момент t , а k — некоторая константа, характеризующая скорость распада. Видно, что скорость уменьшения количества вещества пропорциональна его наличному количеству. Разделяя переменные и интегрируя, получим $dx/x = -k dt$, $\ln x = -kt + c$, откуда $x = x_0 e^{-k(t-t_0)}$, где x_0 — количество вещества в момент t_0 .

Такому же уравнению удовлетворяет процесс охлаждения тела — скорость охлаждения пропорциональна разности температуры тела и окружающей среды. Пусть $z(t)$ — температура тела в момент t , тогда $dz/dt = -k(z - s)$, где s — температура окружающей среды, а k — некоторая положительная константа. Интегрируя это уравнение, получаем $dz/(z - s) = -k dt + c$. В итоге получаем функцию $z(t) = s + (z_0 - s)e^{-k(t-t_0)}$, где z_0 — температура в момент t_0 .

Многие дифференциальные уравнения путем замены переменных могут быть приведены к уравнениям с разделяющимися переменными. Например, уравнение $dy/dx = f(ax + by)$ заменой переменных $z = ax + by$ преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными. Действительно, переходя к новым переменным x и z , получим $dz/dx = a + b dy/dx$, т.е. $dz/dx = a + b/f(z)$, а в этом уравнении переменные уже разделены.

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и так называемые однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка, т.е. уравнения вида $dy/dx = f(y/x)$.

Введем новую переменную $z = y/x$, тогда получим $y = zx$, $dy/dx = xdz/dx + z$, $xdz/dx + z = f(z)$, $dz/(f(z) - z) = dx/x$, а в этом уравнении переменные уже разделены.

5. Линейные уравнения 1-го порядка, уравнение Бернулли. Линейным называется уравнение 1-го порядка, линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Оно имеет вид

$$dy/dx + p(x)y = f(x), \quad (5)$$

где $p(x)$ и $f(x)$ — непрерывные функции.

Если $f(x)$ тождественно нулевая функция, то уравнение (5) приобретает вид $dy/dx = -p(x)y$ и называется *линейным однородным*. Оно является уравнением с разделяющимися переменными: $dy/y = -p(x)dx$. Интегрируя, получаем

$$y = c e^{-\int p(x)dx}, \quad (6)$$

Для нахождения решений неоднородного линейного уравнения (5) применяют метод вариации постоянной. При применении этого метода сначала интегрируется соответствующее однородное уравнение $dy/dx = -p(x)y$. Как указано выше, его общее решение есть $y = c e^{-\int p(x)dx}$. При постоянном c эта функция является решением однородного уравнения.

Попробуем теперь удовлетворить неоднородному уравнению, считая c функцией $c(x)$. Попробуем подобрать $c(x)$, дифференцируя функцию $y(x) = c(x) e^{-\int p(x)dx}$ и подставляя ее в исходное неоднородное уравнение (5). Получим: $y' = c' e^{-\int p(x)dx} + c e^{-\int p(x)dx} (-p)$, $c' e^{-\int p(x)dx} + c e^{-\int p(x)dx} (-p) + py = f$.

Но $c e^{-\int p(x)dx} (-p) + py = 0$, так что остается $c' e^{-\int p(x)dx} = f$, откуда находим, что $c = \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + c_1$. Следовательно, $y = c(x) e^{-\int p(x)dx} = c_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx$. Это общее решение, содержащее произвольную постоянную c_1 . Взяв $c_1 = 0$, получим частное решение $y_0(x) = e^{-\int p(x)dx} \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx$. Теперь видно, что общее решение можно записать так: $y(x) = c_1 e^{-\int p(x)dx} + y_0(x)$, т.е. как сумму частного решения $y_0(x)$ неоднородного уравнения (5) и общего решения $c_1 e^{-\int p(x)dx}$ однородного уравнения (6).

Пример 5. Решить уравнение $y' + y = 2x$.

Решение. Не имеет смысла запоминать громоздкие формулы общего решения, выведенные чуть выше; проще повторить конкретные выкладки. Проинтегрируем однородное уравнение $y' + y = 0$. Оно с разделяющимися переменными $dy/y = -dx$, и потому его решение есть $y = ce^{-x}$. Теперь считаем c функцией x , тогда $y' = c'e^{-x} - ce^{-x}$ и, подставляя в исходное уравнение, получим $c'e^{-x} - ce^{-x} + ce^{-x} = 2x$ или $c'e^{-x} = 2x$. Следовательно, $c' = 2xe^x$, $c = \int 2xe^x dx$. Этот интеграл надо находить интегрированием по частям. Получаем $c = 2e^x(x - 1) + c_1$. Далее имеем $y(x) = (2e^x(x - 1) + c_1)e^{-x}$. Окончательно имеем $y(x) = 2(x - 1) + c_1e^{-x}$.

Многие дифференциальные уравнения могут быть сведены к линейным. Например, уравнение Бернулли, имеющее вид

$$dy/dx + p(x)y = f(x)y^n, \quad n \neq 1 \quad (7)$$

(при $n = 1$ оно уже линейное, поэтому этот случай исключают).

Перепишем его в виде $y^{-n}dy/dx + p(x)y^{1-n} = f(x)$. Тогда заменой переменных $y^{1-n} = z$ оно сводится к линейному уравнению. Действительно, дифференцируя $y^{1-n} = z$, находим $(1 - n)y^{-n} dy/dx = dz/dx$, и, подставляя это в уравнение (7), получим линейное уравнение $1/(1 - n) \cdot dz/dx + p(x)z = f(x)$.

ЗАДАЧИ

1. Найдите общее решение уравнений: а) $y' = 2x - 4$; б) $y' = 1 - e^{-x}$; в) $y' = x + \sin x$; г) $y' = 7 + \cos x$; д) $y' = xe^x$.

2. Найдите частные решения уравнений, которые при $x = 0$ принимают значение, равное единице: а) $y' = x$; б) $y' = \sin x$; в) $y' = \ln x$.

3. Найдите общие решения уравнений с разделяющимися переменными: а) $xyy' = 1 - x$; б) $yy' = (1 - 2x)/y$; в) $y' = 10^{x+y}$; г) $e^{-x}(1 + ds/dt) = 1$.

4. Найдите общие решения однородных уравнений: а) $y' = y^2/x^2 - 2$; б) $y' = (x + y)/(x - y)$; в) $y' = y/x + x/y$; г) $y' = 2xy/(x^2 - y^2)$.

5. Найдите общие решения линейных уравнений: а) $y' + 2y = 4x$; б) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; в) $y' + y = \cos x$; г) $y' + y = \sin x$.

6. Сейчас население Индии составляет примерно 1 млрд человек и растет со скоростью 3% в год. Каким оно будет через 20 лет при сохранении такого темпа роста?

7. Период полураспада урана-238 равен 4,51 млрд лет. Напишите уравнение процесса распада.

8. При взрыве атомной бомбы в течение короткого времени число свободных нейтронов растет со скоростью, пропорциональ-

ной их числу (это, в конечном счете, и есть атомный взрыв). Составьте уравнение процесса размножения нейтронов.

9. За полчаса тело охладилось со 100 до 50°C (при температуре окружающей среды 0°C). Напишите уравнение процесса охлаждения.

10. Сопротивление воды прямо пропорционально скорости лодки. Составьте уравнение движения лодки в пруду после того, как гребцы перестанут грести.

11. Коэффициент выбытия фондов равен $1/10$, а инвестиции постоянны. Опишите процесс движения фондов, рассуждая чисто экономически. Подкрепите затем свое рассуждение математическими выкладками.

12. Предположим, что месячный доход семьи постоянный, а траты пропорциональны накоплениям. Стабилизируются ли накопления?

Тема 13.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

13.1. МОДЕЛИ ЭВАНСА И СОЛОУ

В этом разделе изучим две широко известные динамические модели экономического характера: сначала *модель Эванса* установления равновесной цены на рынке одного товара, затем динамическую односекторную модель экономического роста, известную под названием «*базовая модель Солоу*».

1. Модель Эванса. Рассматривается рынок одного товара, время считается непрерывным. Пусть $d(t)$, $s(t)$, $p(t)$ — соответственно спрос, предложение и цена этого товара в момент t . И спрос, и предложение считаются линейными функциями цены, т.е. $d(p) = a - bp$, $a, b > 0$ — спрос с ростом цены падает, а $s(p) = \alpha + \beta p$, $\alpha, \beta > 0$ — предложение с ростом цены растет. Естественно считать, что $a > \alpha$, т.е. при нулевой цене спрос превышает предложение (по-другому говоря, товар желателен).

Основное предположение состоит в том, что цена изменяется в зависимости от соотношений между спросом и предложением: $\Delta p =$

$= \gamma(d - s)\Delta t$, где $\gamma > 0$, т.е. увеличение цены прямо пропорционально превышению спроса над предложением и длительности этого превышения. Итак, получаем дифференциальное уравнение $dp/dt = \gamma(d - s)$. Подставляя в это уравнение линейные зависимости спроса и предложения от цены, получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение с начальным условием:

$$dp/dt = -\gamma((b + \beta)p - a + \alpha), p(0) = p_0. \quad (1)$$

Это уравнение имеет стационарную точку $p^* = (a - \alpha)/(b + \beta) > 0$. Видно, что $dp/dt > 0$ при $p^* > p$ и $dp/dt < 0$ при $p^* < p$. Отсюда следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p^*$. При $p_0 < p^*$ цена стремится к p^* возрастая, а при $p_0 > p^*$ — убывая. Сама цена p^* есть равновесная цена — при ней равны спрос и предложение: $d(p) = s(p) \rightarrow a - bp = \alpha + \beta p \rightarrow p^* = (a - \alpha)/(b + \beta)$. Равновесная цена может быть найдена также графически — как точка пересечения прямых спроса $d(p) = a - bp$ и предложения $s(p) = \alpha + \beta p$ (рис. 1).

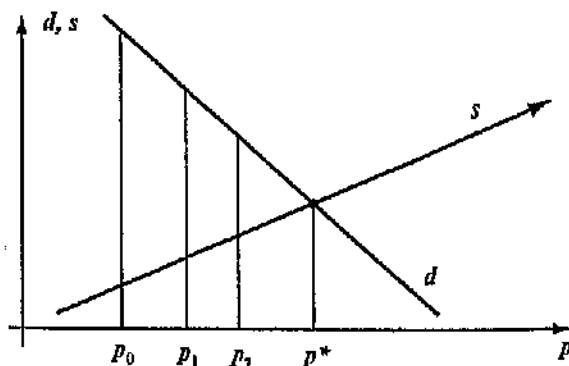


Рис. 1

В п. 5 раздела 12.1 был рассмотрен метод решения уравнения такого вида — метод вариации постоянной. Согласно этому методу общее решение есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения $dp/dt + \gamma(b - a)p = 0$ и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения (1). Не останавливаясь на этом сейчас, выпишем решение дифференциального уравнения с начальным условием (1):

$$p(t) = p_0 e^{-\gamma(b + \beta)t} + (a - \alpha)/(b + \beta)[1 - e^{-\gamma(b + \beta)t}] \quad (2)$$

или

$$p(t) = p_0 e^{-\gamma(b + \beta)t} + p^*[1 - e^{-\gamma(b + \beta)t}].$$

Опять же видно, что $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p^*$.

Рассмотрим дискретный аналог модели Эванса. В дискретной модели рынок функционирует следующим образом: утром на рынке обнаруживается некоторое предложение s и спрос d . В зависимости от их значений цена начинает равномерно расти или убывать: если утром спрос был больше предложения, то возрастать; если предложение было больше спроса, то убывать. Предположим, что начальная цена была p_0 , при этом $s(p_0) < d(p_0)$. Следовательно, цена начнет возрастать. За день она возрастет до некоторого значения p_1 . На следующее утро предложение и спрос будут соответствовать этой цене p_1 , при этом опять будет $s(p_1) < d(p_1)$ и цена будет возрастать и т.д. (рис. 1).

Однако, в отличие от паутинообразной модели рынка (см. п. 4 раздела 4.1), точка равновесия не переходится, т.е. если цена была меньше равновесной, то она так и останется меньше, и весь процесс изображается слева от точки равновесия, а если цена была больше равновесной, то она так и останется больше, и весь процесс изображается справа от точки равновесия.

2. Параметры модели Солоу. Экономика рассматривается как единое целое (без структурных подразделений), в ней производится единственный универсальный продукт, который может потребляться как в непродуцированной сфере, так и в производственной; потребление его в производственной сфере может рассматриваться как инвестирование (с некоторой натяжкой таким «продуктом» может выступать денежная оценка всего и вся). Эта модель достаточно адекватно отражает важнейшие макроэкономические аспекты, в том числе и процесса воспроизводства.

Состояние экономики в модели Солоу задается пятью переменными состояниями: Y — конечный продукт, L — наличные трудовые ресурсы, K — производственные фонды, I — инвестиции, C — размер непродуцированного потребления. Все переменные взаимосвязанно изменяются во времени, т.е. являются функциями времени t , но далее аргумент t будет часто опускаться, хотя и будет подразумеваться по умолчанию.

Время будет предполагаться непрерывным. Для мгновенных показателей K , L можно считать, что K , L — соответственно фонды и трудовые ресурсы в момент t или, чтобы избежать сезонных изменений числа занятых и всплеска фондов при вводе новых мощностей, K и L можно считать средними значениями этих величин за год, серединой которого служит t . Для величин же Y , C , I их значения в момент t можно себе представить, как их объемы, накопленные за год, серединой которого служит момент t (но и в этом случае они остаются функциями времени и их все же лучше воспринимать как

мощность производства и мгновенные скорости потребления и инвестирования).

Считается, что ресурсы (производственные и трудовые) используются полностью. Годовой конечный продукт в каждый момент времени является функцией среднегодовых фондов и труда: $Y = F(K, L)$. Таким образом, $F(K, L)$ — производственная функция всего народного хозяйства.

Конечный продукт используется на непроизводственное потребление и инвестиции: $Y = C + I$.

Назовем нормой накопления ρ долю конечного продукта, используемого на инвестиции, тогда $I = \rho Y$, $C = (1 - \rho)Y$. В дальнейшем норма накопления будет считаться постоянной: $\rho = \text{const}$, $0 < \rho < 1$.

Инвестиции используются на восстановление выбывших фондов и на их прирост (считается, что эти инвестиции расходуются только на эти цели — для сравнения см. задачу «Б» п. 2 раздела 12.1)). Если принять, что выбытие происходит с постоянным коэффициентом выбытия μ , $0 < \mu < 1$ (в расчете на год), то $K = K(t + \Delta t) - K(t) = \rho Y \Delta t - \mu K \Delta t$, поэтому $dK/dt = \rho Y - \mu K$.

Если считать, что прирост трудовых ресурсов пропорционален наличным трудовым ресурсам, т.е. $\Delta L = \nu L \cdot \Delta t$, то получаем дифференциальное уравнение $dL/dt = \nu L$ и, решая его, получаем $L = L_0 e^{\nu t}$, где $L_0 = L(0)$ — трудовые ресурсы в начале наблюдения, при $t = 0$.

Таким образом, модель Солоу задается схемой (рис. 2) или системой уравнений:

$$\begin{aligned} C &= (1 - \rho)Y; \\ Y &= F(K, L); \\ L &= L_0 e^{\nu t}; \\ dK/dt &= \rho Y - \mu K, \quad K(0) = K_0. \end{aligned} \quad (3)$$

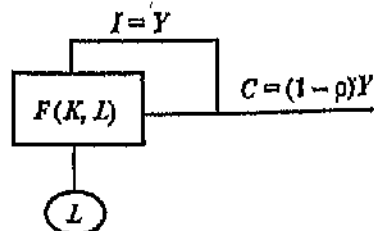


Рис. 2

Функция $F(K, L)$ удовлетворяет требованиям к производственным функциям (см. п. 3 раздела 6.1 или п. 1 раздела 9.2) и считается линейно-однородной, т.е. $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$. Пользуясь ее однородностью и обозначив среднюю производительность труда $y = Y/L$ и среднюю фондовооруженность $k = K/L$, получаем $y = Y/L = F(K, L)/L = F(K/L, 1) = F(k, 1)$, а если обозначим последнюю функцию $f(k)$, то получаем $y = f(k)$.

Далее найдем производную от k по t : $dk/dt = d(K/L)/dt = (K'L - KL')/L^2 = K'/L - K(L'/L^2) = (\rho Y - \mu K)/L - K\nu/L = \rho y - (\mu + \nu)k$.

Окончательно:

$$dk/dt = \rho f(k) - (\mu + \nu)k, \quad k(0) = k_0 = K_0/L_0. \quad (4)$$

Поведение макропоказателей модели (3) целиком определяется уравнением (4) и динамикой трудовых ресурсов $L = L_0 e^{\nu t}$.

Уравнение (4) — это уравнение с разделяющимися переменными и начальным условием, поэтому оно имеет единственное решение. Исследуем только некоторые специальные решения этого уравнения.

3. Стационарные траектории в модели Солоу. Рассмотрим стационарную траекторию, т.е. такую, на которой фондовооруженность k постоянна и равна, следовательно, своему начальному значению: $k(t) = \text{const} = k^0$. Но поскольку таким постоянным значением может быть, наверное, не всякое начальное, обозначим его k^0 .

Такое значение фондовооруженности называется стационарным. Конечно, на стационарной траектории $dk/dt = 0$.

Рассмотрим, как на стационарной траектории ведут себя макропоказатели K, L, C, I, Y .

Согласно уравнению (4), если $dk/dt = 0$, то $\rho f(k) - (\mu + \nu)k = 0$, т.е. k^0 есть решение уравнения

$$\rho f(k) - (\mu + \nu)k = 0. \quad (5)$$

Докажем, что это уравнение имеет решение.

Так как $f(k) = F(k, 1)$, то $f'(k) > 0$, но $f'(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ (это следует из требований к производственной функции — см. выше), то $f(k)$ — возрастающая функция, но темп ее роста замедляется. В то же время $(\mu + \nu)k$ возрастает с постоянным темпом. Значит, если $\rho f'(0) > (\mu + \nu)$, то уравнение (5) имеет единственное решение k^0 при $k > 0$ (рис. 3).

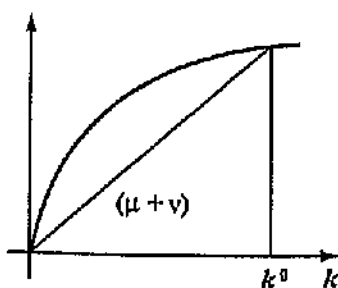


Рис. 3

Итак, каковы K, L, C, I, Y на стационарной траектории?

Поскольку $L(t) = L_0 e^{\nu t}$, а $k = K(t)/L(t)$, то $K(t) = k^0 L(t) = k^0 L_0 e^{\nu t}$; аналогично $Y(t) = f(k^0) L(t) = f(k^0) L_0 e^{\nu t}$. Далее, $C(t) = (1 - \rho) Y(t) = (1 - \rho) f(k^0) L_0 e^{\nu t}$, $I(t) = \rho f(k^0) L_0 e^{\nu t}$. Сведем все вместе:

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0 e^{\nu t}; \\ K(t) &= k^0 L_0 e^{\nu t}; \\ Y(t) &= f(k^0) L_0 e^{\nu t}; \\ C(t) &= (1 - \rho) f(k^0) L_0 e^{\nu t}; \\ I(t) &= \rho f(k^0) L_0 e^{\nu t}. \end{aligned}$$

Получаем вывод: на стационарной траектории все основные макропоказатели растут экспоненциально, пропорционально трудовым ресурсам.

Конкретизируем описанный общий случай применительно к производственной функции Кобба–Дугласа $F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$, $A > 0$, $0 < \alpha < 1$. Поскольку при этом $f(k) = F(k, 1) = Ak^\alpha$, то уравнение (4) принимает вид: $dk/dt = \rho Ak^\alpha - (\mu + \nu)k$, $k(0) = k_0$.

Это уравнение с разделяющимися переменными и его можно было решить по общему правилу (см. п. 4 раздела 12.1), но оказалось удобнее решить следующим образом.

Сделаем замену переменной $k(t) = u(t)e^{-(\mu + \nu)t}$, где $u(t)$ — новая функция от t . Тогда получим: $dk/dt = du/dt \cdot e^{-(\mu + \nu)t} - (\mu + \nu)e^{-(\mu + \nu)t} u(t)$, и, подставляя вместо k его выражение через u , получим: $\rho A(u e^{-(\mu + \nu)t})^\alpha - (\mu + \nu)(u e^{-(\mu + \nu)t}) = du/dt \cdot e^{-(\mu + \nu)t} - (\mu + \nu)e^{-(\mu + \nu)t} u$. Преобразуя далее, получим уравнение относительно u : $du/dt = \rho A u^\alpha e^{(1-\alpha)(\mu + \nu)t} - (\mu + \nu)u$, $u(0) = k_0$, которое легко решается: $du/u^\alpha = \rho A e^{(1-\alpha)(\mu + \nu)t} dt$, $1/(1-\alpha) u^{1-\alpha} = \rho A / ((1-\alpha)(\mu + \nu)) e^{(1-\alpha)(\mu + \nu)t} + c$, отсюда $c = (k_0^{1-\alpha} - \rho A / ((1-\alpha)(\mu + \nu))) / (1-\alpha)$, $u^{1-\alpha} = \rho A / ((1-\alpha)(\mu + \nu)) [e^{(1-\alpha)(\mu + \nu)t} - 1] + k_0^{1-\alpha}$. Окончательно, $u(t) = (k_0^{1-\alpha} + A / ((1-\alpha)(\mu + \nu)) [e^{(1-\alpha)(\mu + \nu)t} - 1])^{1/(1-\alpha)}$.

Следовательно, $k(t) = u(t) e^{-(\mu + \nu)t}$.

Видно, что $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = [\rho A / ((1-\alpha)(\mu + \nu))]^{1/(1-\alpha)}$.

Но в нашем случае уравнение (5), т.е. $\rho f(k) - (\mu + \nu)k = 0$, имеет вид $\rho Ak^\alpha = (\mu + \nu)k$, и стационарное значение фондовооруженности для функции Кобба–Дугласа равно $k^0 = [\rho A / ((1-\alpha)(\mu + \nu))]^{1/(1-\alpha)}$.

Следовательно, при любом начальном значении k_0 фондовооруженность $k(t)$ сходится к стационарному значению k^0 .

Поскольку $y(t) = Ak^\alpha$, то и производительность труда сходится к стационарному значению $y^0 = A \cdot [\rho A / ((1-\alpha)(\mu + \nu))]^{\alpha/(1-\alpha)}$.

Поэтому и удельное потребление (на одного работающего) также сходится к стационарному значению: $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)/L(t) =$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \rho)y(t) = (1 - \rho)A[\rho A / ((1-\alpha)(\mu + \nu))]^{\alpha/(1-\alpha)}.$$

При исследовании модели вполне разумно принять в качестве критерия успешности развития экономики величину удельного потребления. Найдем, при каком значении нормы накопления ρ предельное удельное потребление, равное, как мы увидели, удельному потреблению в стационарном режиме, максимально. Для этого продифференцируем эту величину удельного потребления: $((1 - \rho)A[\rho A / ((1-\alpha)(\mu + \nu))]^{\alpha/(1-\alpha)})'$ по ρ и приравняем производную нулю: $((1 - \rho)A[\rho A / ((1-\alpha)(\mu + \nu))]^{\alpha/(1-\alpha)})'_\rho = 0$, $((1 - \rho)\rho^{\alpha/(1-\alpha)})' = 0$. После несложных выкладок получим $\rho^* = \alpha$.

4. «Золотое правило» экономического роста. Итак, оптимальная норма накопления в стационарном режиме равна коэффициенту эла-

стичности по фондам («золотое правило» экономического роста). Но это справедливо для производственной функции Кобба–Дугласа. Для других производственных функций это правило, вполне возможно, будет другим.

ЗАДАЧИ

1. Решите подробно уравнение (1).
2. Выпишите в явном виде функции спроса и предложения уже как функции времени, воспользовавшись найденной зависимостью цены от времени (см. формулу (2)).

13.2. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

1. Метод Эйлера приближенного решения дифференциальных уравнений. Класс дифференциальных уравнений, интегрирующихся в квадратурах, т.е. решения которых можно записать в виде интегралов, крайне узок, и поэтому нужды теории и практики потребовали развития методов нахождения приближенных решений дифференциальных уравнений. Справедливости ради нужно сказать, что неспециалисту по дифференциальным уравнениям или численным методам вряд ли имеет смысл самому заниматься поиском приближенного решения. Однако некоторые основополагающие моменты этих методов знать полезно.

Отметим также, что нахождение приближенного решения вручную весьма трудоемко, точность приближения получается недостаточной, и использование компьютера представляется неизбежным.

Отметим также, что теперь, с развитием вычислительной техники, часто целесообразно применять приближенные методы даже в тех случаях, когда уравнение интегрируется в квадратурах. Более того, это целесообразно даже в тех редких случаях, когда решение выражается в элементарных функциях, так как использование таблиц значений этих функций (показательной, логарифмической, тригонометрических) оказывается более трудоемким, чем приближенное интегрирование уравнения на быстродействующем компьютере.

Рассмотрим метод Эйлера приближенного решения дифференциальных уравнений. Это — один из самых старых и простых методов приближенного решения дифференциального уравнения $dy/dx = f(x, y)$.

Суть метода в том, что искомая интегральная кривая этого уравнения, проходящая через точку (x_0, y_0) , заменяется ломаной линией, состоящей из прямолинейных отрезков и каждое звено которой является интегральной кривой в одной из своих точек (рис. 1).

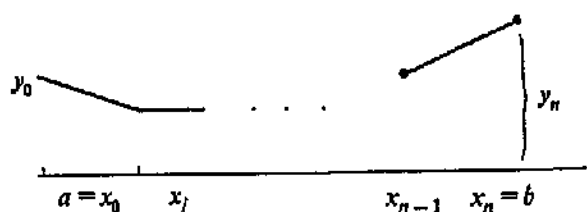


Рис. 1

При применении этого метода для приближенного вычисления интегральной кривой на отрезке $[a, b]$, $a < b$, этот отрезок разбивается на n равных частей точками $a = x_0 < \dots < x_n = b$ и $h = (b - a)/n$ называется *шагом вычисления*. Будем обозначать приближенные значения искомого решения в точке x_i через y_i , а значение $f(x_i, y_i)$ через y'_i .

Для вычисления y_1 заменим на отрезке $[x_0, x_1]$ искомую интегральную кривую отрезком ее касательной в точке x_0 . Следовательно, $y_1 = y_0 + y'_0 h$, аналогично, $y_2 = y_1 + y'_1 h$ и т.д. Окончательно: $y_n = y_{n-1} + y'_{n-1} h$.

Получается так называемая *ломаная Эйлера*. Естественно ожидать, что при $h \rightarrow 0$ ломаные Эйлера приближаются к графику искомой интегральной кривой и, следовательно, с уменьшением шага метод Эйлера дает все более точное значение решения на отрезке $[a, b]$. Это действительно так, если функция $f(x, y)$ удовлетворяет некоторым, не очень ограничительным с практической точки зрения условиям (см. далее п. 2). Из-за своей простоты метод Эйлера довольно часто применяется на практике — ведь самым сложным в нем является вычисление значений $y'_i = f(x_i, y_i)$. Однако при систематической нужде в нахождении приближенных решений приходится применять более точные методы, о которых можно прочитать в специальной литературе.

2. Теорема существования и единственности решения. Если в уравнении $dy/dx = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике D : $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$, $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$ и удовлетворяет в прямоугольнике D условию Липшица: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N \cdot |y_1 - y_2|$, где N — константа, то в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение уравнения, проходящее через эту точку.

Теорема гарантирует существование и единственность решения лишь в некоторой окрестности точки x_0 . Однако если в граничной точке этой окрестности условия теоремы опять выполнены, то это решение может быть продолжено еще на некоторую окрестность уже этой граничной точки; в целом получится еще больший отрезок, чем первоначальный, и т.д.

Что касается условия Липшица, то оно удовлетворяется, если, например, функция $f(x, y)$ имеет в прямоугольнике D ограниченную частную производную по y .

Доказательство этой теоремы основано в сущности на том, что в условиях теоремы ломаные Эйлера в пределе дадут интегральную кривую.

В силу практической важности теория дифференциальных уравнений развита весьма хорошо. Вот пример теоремы о свойствах решений дифференциального уравнения.

Теорема о дифференцируемости решений. Если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , т.е. в некотором прямоугольнике вокруг этой точки, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до n -го порядка включительно, то решение $y(x)$ уравнения $dy/dx = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$ (это решение существует по только что рассмотренной теореме), в некоторой окрестности точки x_0 имеет непрерывные производные до n -го порядка включительно.

3. Понятие об устойчивости решений дифференциального уравнения. Для возможности математического описания какого-нибудь реального явления неизбежно приходится упрощать его, выделяя и учитывая лишь наиболее существенные из влияющих на него факторов и отбрасывая остальные, менее существенные. При этом неизбежно встает вопрос о том, удачно ли выбраны упрощающие предположения. Возможно, что неучтенные факторы сильно влияют на изучаемое явление, значительно меняя его количественные или даже качественные характеристики.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $dy/dx = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Подобные начальные условия обычно являются результатами измерений и, следовательно, получены с некоторой погрешностью. Возникает вопрос о влиянии этих погрешностей на искомое решение.

Если окажется, что сколь угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменить решение, то такое решение обычно не имеет никакого прикладного значения и его нельзя применить для описания изучаемого явления. Если же малые изменения начальных данных лишь незначительно меняют само решение, то говорят, что имеет место непрерывная зависимость решений от начальных данных. Вопрос о непрерывной зависимости является практически важным.

Теорема о непрерывной зависимости решения. При выполнении условий теоремы существования и единственности решения (см. выше) решение уравнения непрерывно зависит от начальных данных в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) .

Поясним эту теорему. Для этого обозначим через $y(x, x_0, y_0)$ единственное решение уравнения $dy/dx = f(x, y)$, которое при $x = x_0$ принимает значение y_0 ; соответственно $y(\bar{x}, \bar{y})$ обозначает решение, которое при $\bar{x}$ принимает значение $\bar{y}$ ($(\bar{x}, \bar{y})$ — точка, близкая к (x_0, y_0)).

Из теоремы существования и единственности решения (см. п. 2) можно вывести, что найдется такая окрестность K точки (x_0, y_0) , т.е. некоторый прямоугольник K , содержащий точку (x_0, y_0) внутри себя, и такая окрестность I точки x_0 (т.е. отрезок I , содержащий точку x_0 внутри себя), что для любой точки $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$ существует единственное решение $y(x, \bar{x}, \bar{y})$, проходящее через эту точку и определенное на окрестности I .

Так вот, теорема о непрерывной зависимости решения от начальных данных утверждает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой прямоугольник $P \subseteq K$,

что как только $(\bar{x}, \bar{y}) \in P$, то $|y(x, x_0, y_0) - y(x, \bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon$ на всем отрезке I (рис. 2). То есть

если точка $(\bar{x}, \bar{y})$ будет близка

к точке (x_0, y_0) , то соответствующие интегральные кривые тоже будут близки друг к другу на всем интервале I .

Эта теорема о непрерывной зависимости решений от начальных условий устанавливает такую зависимость на некотором интервале конечной длины вокруг начальной точки x_0 . Если же исследуются подобные вопросы на бесконечном промежутке, то говорят об устойчивости решения. Понятие устойчивости является практически важным, неустойчивые решения в редких случаях представляют интерес на практике.

4. Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков и системах дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения n -го порядка имеют вид $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ или, если они решены относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1)$$

Для таких уравнений также имеет место следующая теорема.

Теорема существования и единственности решения. Уравнение (1) имеет единственное решение $y(x)$, удовлетворя-

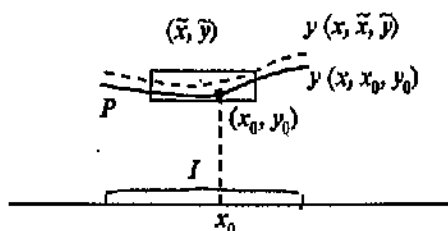


Рис. 2

ющее условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, если в окрестности начальных значений функция f является непрерывной функцией всех своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго.

Эта теорема есть точное обобщение соответствующей теоремы для дифференциальных уравнений 1-го порядка (см. выше п. 2).

Общим решением дифференциального уравнения n -го порядка называется *компактная запись* всех решений уравнения. Для уравнения n -го порядка в этой записи будут присутствовать n параметров произвольных постоянных. В качестве этих параметров могут быть выбраны, например, значения при $x = x_0$ самой функции y и ее производных y' , ..., $y^{(n-1)}$. В частности, общее решение уравнения 2-го порядка $y'' = f(x, y, y')$ зависит от двух параметров c_1 и c_2 , например, значений y и y' при $x = x_0$. Если же эти значения фиксировать, т.е. задать точку (x_0, y_0) и направление касательной к искомой интегральной кривой в точке x_0 , то этими условиями определится единственная интегральная кривая исходного уравнения.

Пример 1. На пружине подвешен груз. Когда пружина не сжата и не растянута, будем считать координату x груза равной нулю, — это положение равновесия. Когда мы оттянем груз вниз, пружина будет стремиться сжаться

и потянет груз вверх. В определенных пределах изменения x по закону Гука сила со стороны пружины, возвращающая груз в положение равновесия, пропорциональна по величине x и обратна по знаку. Значит, таково же и ускорение, и потому дифференциальное уравнение, описывающее процесс колебаний груза на пружине, т.е. зависимость координаты x'' от времени t , есть $x'' = -kx$ (никакие силы сопротивления типа сопротивления воздуха не учитываются). Оттянем же груз вниз на величину a и отпустим. Эти начальные условия $x(0) = -a$, $x'(0) = 0$ дают решение $x(t) = -a \cos \sqrt{k} t$. Для проверки сначала продифференцируем его дважды и подстановкой в дифференциальное уравнение убедимся, что это в самом деле его решение. Затем убедимся, что выполняются начальные условия. Теперь — на основании теоремы о существовании и единственности — можно заключить, что это решение искомое.

Рис. 3

Дифференциальное уравнение n -го порядка можно свести к системе n дифференциальных уравнений 1-го порядка. В самом деле, обозначим y' через y_1 , y'' через y_2 , ..., $y^{(n-1)}$ через y_{n-1} . Получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y' = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ \vdots \\ y_{n-1}' = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1}). \end{cases} \quad (2)$$

Для этой системы также можно ввести понятие частного и общего решений, а также начальных условий. Начальные условия можно задавать значениями всех функций $y, y_1, \dots, y_{n-1}$ в некоторой точке x_0 , т.е. это просто начальные условия исходного уравнения n -го порядка. Когда такое частное решение системы будет найдено, то функция y будет искомым частным решением исходного уравнения n -го порядка.

Верно и обратное: если дана произвольная система (3) дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \vdots \\ y'_n = f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{cases} \quad (3)$$

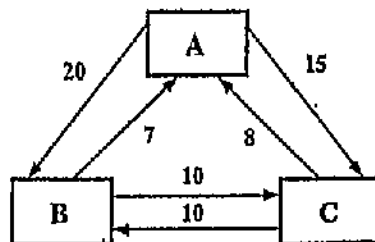
то ее можно, исключив все неизвестные функции, кроме одной, свести к одному уравнению соответствующего порядка, которое, возможно, решить окажется проще.

Пример 2. Решить систему $\begin{cases} dy/dx = z \\ dz/dx = y \end{cases}$ двух уравнений 1-го порядка.

Решение. Продифференцировав первое уравнение, получим $y'' = z'$. Подставим в него z из второго уравнения, получим $y'' = y$. Общее решение этого уравнения есть $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Используя первое уравнение, получаем $z = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$, и исходная система решена.

ЗАДАЧА

Вспомним «задачу о разведчике» (см. п. 1 раздела 1.3). В эвекренном городке около 100 000 рабочих работало на трех крупных заводах, других заводов в городке не было. Разведчику удалось достать данные о текучести кадров: за год из каждой тысячи работающих с завода A 20 чел. переходят на завод B , 15 чел. на завод C и т.д. Городок жил стабильной спокойной жизнью уже много лет. В этих условиях разведчик сумел установить численность рабочих на каждом заводе. Сумеете ли сделать это вы?



Эта задача была решена. Но теперь мы составим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют численности рабочих на этих заводах. Ведь текучесть кадров есть скорость изменения численности рабочих. Поэтому получаем следующую систему диффе-

ренциальных уравнений, к которым добавлено нормировочное уравнение

$$\begin{cases} da/dt = -0,035a + 0,007b + 0,008c; \\ db/dt = 0,020a - 0,017b + 0,010c; \\ dc/dt = 0,015a + 0,010b - 0,018c; \\ a + b + c = 100\,000. \end{cases} \quad (4)$$

Для точной постановки нужно добавить еще начальное условие, выражающее численность рабочих на каждом заводе на начальный момент $a(0) = a$, $b(0) = b$, $c(0) = c$. Однако можно доказать, что независимо от этих начальных условий функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ стремятся при $t \rightarrow \infty$ к некоторым константам a^* , b^* , c^* , которые называются предельными или стационарными значениями, и при этом их производные стремятся к нулю. Эти константы легко найти, если положить все производные равными нулю и решить систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -0,035a + 0,007b + 0,008c; \\ 0 = 0,020a - 0,017b + 0,010c; \\ 0 = 0,015a + 0,010b - 0,018c; \\ 0 = a + b + c - 100\,000. \end{cases}$$

Именно эта система и была решена в п. 1 раздела 1.3. Отметим, что подобные системы дифференциальных уравнений широко используются в теории массового обслуживания.

Тема 14.

ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

14.1. ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1. Сумма ряда. Пусть дана некоторая бесконечная последовательность чисел

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

Составленный из этих чисел символ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (2)$$

называется бесконечным рядом, а сами числа (1) — членами ряда.

Вместо (2), пользуясь знаком суммы, часто пишут:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (2, a)$$

Сумма нескольких первых подряд членов ряда называется частичной суммой:

$$A_1 = a_1; A_2 = a_1 + a_2, \dots; A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n; \dots \quad (3)$$

Конечный или бесконечный предел A частичных сумм A_n ряда (2) при $n \rightarrow \infty$ называют суммой ряда и пишут $A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

$$\text{или } \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если ряд имеет конечную сумму, то его называют сходящимся, в противном же случае (если сумма равна бесконечности или же суммы нет вовсе) — расходящимся.

Таким образом, вопрос о том, имеет ли ряд сумму, равносильен вопросу о том, имеет ли предел последовательность его частичных сумм. Вопрос же о сходимости или расходимости ряда равносильен вопросу о существовании конечного предела последовательности частичных сумм. Верно и обратное: какую бы последовательность $\{b_n\}$ ни взять, вопрос о наличии у нее предела равносильен существованию суммы ряда $b_1 + (b_2 - b_1) + \dots + (b_n - b_{n-1}) + \dots$.

Пример 1. Хорошо знакомым бесконечным рядом является геометрическая прогрессия $b, bq, bq^2, \dots, bq^{n-1}, \dots$. Ее частичная сумма при $q \neq 1$ есть $s_n = (b - bq^n)/(1 - q)$. Как известно, при $|q| < 1 \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b/(1 - q)$. Это

и есть сумма всей бесконечно убывающей геометрической прогрессии. При $|q| \geq 1$ такая же прогрессия дает пример расходящегося ряда, причем при $q \geq 1$ его суммой будет бесконечность определенного знака (в зависимости от знака членов прогрессии), если же $q \leq -1$, то прогрессия суммы не имеет.

В экономике бесконечные ряды и их суммы появляются в основном в теоретических исследованиях. Предположим, рассматривается вопрос о рыночной цене бессрочной облигации номиналом 1000 дол. и 3-процентным купоном. Это значит, что владелец этой облигации будет каждый год получать 30 дол. Но как определить истинную цену всей этой бесконечной последовательности платежей? Как правило, любая валюта подвержена инфляции (до первой мировой войны экономисты считали инфляцию явлением исключительно предным, однако после этой войны почти все стали признавать полезность небольшой инфляции — 1—2% в год). Если инфляция составляет 2% в год, то 30 дол., которые получим через год, сейчас эквивалентны $30/(1 + 0,02)$ дол. А те же 30 дол., которые планируем получить через 2 года, сейчас эквивалентны $30/(1 + 0,02)^2$ дол. и т.д. Выходит, что бесконечный ряд платежей в 30 дол., которые будем получать каждый год в будущем, сейчас эквивалентны сумме ряда $\sum_{n=0}^{\infty} 30/(1 + 0,02)^n$, т.е. сумме бесконечно убывающей геометрической

прогрессии (первый платеж 30 дол. будет на днях). Воспользовавшись известной формулой, находим, что эта сумма равна 1530 дол. (эта задача была рассмотрена в п. 2 раздела 4.1, в п. 3 этого же раздела было дано и определение суммы бесконечного ряда).

Такого рода дисконтирование, т.е. нахождение сегодняшних эквивалентов прошлых или будущих платежей, применяется и в других ситуациях. Пусть, например, рассматриваются две стратегии действий фирмы в будущем. Для выяснения, какая из них лучше, приходится дисконтировать к сегодняшнему моменту будущие прибыли по каждой из этих стратегий. Сегодняшний эквивалент этих дисконтированных прибылей представляет сумму бесконечного ряда. Какая из этих сумм больше, ту стратегию, наверное, и нужно выбрать.

2. Свойства и признаки сходящихся рядов. Доказательства очень просты и опущены.

Если в ряде (2) отбросить n первых членов, то получится ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots \quad (4)$$

называемый остатком ряда (2) после n -го члена.

А. Если сходится ряд (2), то сходится и любой из его остатков (4); наоборот, из сходимости остатка (4) вытекает сходимость исходного ряда. Таким образом, отбрасывание конечного числа членов ряда или присоединение к нему нескольких новых членов не отражается на поведении ряда (в смысле его сходимости или расходимости).

Б. Обозначим остаток после m -го члена через r_m . Тогда, если исходный ряд сходится, то r_m стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$.

В. Общий член a_m сходящегося ряда стремится к нулю.

Это необходимое условие сходимости ряда; при его невыполнении ряд не может сходиться, т.е. заведомо расходится. Однако оно не является достаточным, т.е. ряд может расходиться, даже если это условие выполнено.

Укажем следующие простые свойства сходящихся рядов.

Г. Если члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, не равное нулю, то его сходимость или расходимость не нарушится, а сумма умножится на это число.

Д. Два сходящихся ряда можно почленно складывать или вычитать, так что ряд $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots$ также сходится и его сумма равна соответственно $A \pm B$.

3. Признаки сходимости знакопостоянных рядов. В таких рядах все члены либо неотрицательны, либо неположительны. Изучим

ряды, все члены которых неотрицательны, или кратко, положительные ряды. Итак, пусть все числа ряда

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (5)$$

неотрицательны, $a_n \geq 0$. Тогда очевидно, все частичные суммы неотрицательны и последовательность A_n частичных сумм оказывается монотонно возрастающей. Такая последовательность всегда имеет предел — конечный, если эта последовательность ограничена сверху, и бесконечный — в противном случае. Получаем следующий вывод.

Вывод: положительный ряд всегда имеет сумму; эта сумма будет конечной и ряд сходящимся, если частичные суммы ограничены сверху, и бесконечной, а ряд — расходящимся в противном случае.

Прежде чем перейти к рассмотрению некоторых признаков сходимости (и расходимости) положительных рядов, докажем расходимость гармонического ряда. Так называется ряд

$$1/1 + 1/2 + \dots + 1/n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n.$$

Имеем очевидное неравенство

$$1/(n+1) + \dots + 1/(2n) > n \cdot 1/(2n) = 1/2.$$

Отбросим первые два члена ряда, тогда остальные можно разбить на группы по 2, 4, 8, ..., 2^k , ... членов в каждой группе:

$$\begin{aligned} & \underbrace{(1/3 + 1/4)}_2 + \underbrace{(1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8)}_4 + \dots + \\ & + \underbrace{(1/(2^k + 1) + 1/(2^k + 2) + \dots + 1/(2^k + 2^k))}_{2^k} + \dots \end{aligned}$$

Каждая из этих сумм в отдельности будет больше $1/2$. Пусть H_n — частичная сумма n первых членов, тогда $H_{2^k} > k \cdot 1/2$. Видим, что частичные суммы не ограничены сверху — значит, гармонический ряд расходится.

Сходимость или расходимость ряда часто можно установить, сравнивая его с другим рядом, сходимость или расходимость которого уже установлена. Следующая теорема представляется очевидной.

Теорема 1. Пусть даны два положительных ряда (A) и (B):

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots; \quad (A)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots. \quad (B)$$

Если хотя бы начиная с некоторого номера выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда (B) следует сходимость ряда (A), или — что то же самое — из расходимости ряда (A) вытекает расходимость ряда (B).

Пример 2. Для ряда $\sum_{n=2}^{\infty} [1/(n-1)^{\sigma} - 1/n^{\sigma}]$ ($\sigma > 0$) n -я частичная сумма равна $1 - 1/n^{\sigma}$ и ясно, что ее предел равен единице при $n \rightarrow \infty$, значит, этот ряд сходится. Теперь сравнением с ним установим сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+\sigma}$ (опять-таки $\sigma > 0$).

Функция $1/x^{\sigma}$ убывающая. Применяя к ней теорему Лагранжа о среднем (см. п. 1 раздела 5.2) в промежутке $[n-1, n]$, получаем $1/(n-1)^{\sigma} - 1/n^{\sigma} = \sigma/(n-\Theta)^{1+\sigma}$, где $0 < \Theta < 1$. Поскольку $1/n^{1+\sigma} < 1/(n-\Theta)^{1+\sigma}$, то $1/n^{1+\sigma} < [1/(n-1)^{\sigma} - 1/n^{\sigma}]/\sigma$. Выше была отмечена сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} [1/(n-1)^{\sigma} - 1/n^{\sigma}]$; значит, по теореме 2, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+\sigma}$.

На практике иногда более удобна следующая теорема, вытекающая из теоремы 1. (В дальнейшем предполагается, что в ряде (Б) все члены, начиная с некоторого, строго положительны.)

Теорема 2. Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = K$, то из сходимости ряда (Б) при $K < \infty$ вытекает сходимость ряда (А), а из расходимости ряда (А) при $K > 0$ вытекает расходимость ряда (Б). Таким образом, при $0 < K < \infty$ оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Следствием теоремы 1 является теорема 3.

Теорема 3. Если хотя бы начиная с некоторого номера выполняется неравенство $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$, то из сходимости ряда (Б) вытекает сходимость ряда (А), а из расходимости ряда (А) вытекает расходимость ряда (Б).

(Предполагается, что не только $b_n \neq 0$, но и $a_n \neq 0$.)

Пример 3. Используя теоремы 1—3, путем сравнения с гармоническим рядом и рядом из примера 2 установим сходимость и расходимость нескольких рядов.

По теореме 1:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n(n+1)}$ расходится: $1/\sqrt{n(n+1)} > 1/(n+1)$;
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n(n^2+1)}$ сходится: $1/\sqrt{n(n^2+1)} < 1/n^{3/2}$;
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} n!/n^n$ сходится: $n!/n^n < 2/n^2$ ($n > 3$).

По теореме 2:

- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n \sqrt[n]{n})$ расходится: $1/(n \sqrt[n]{n}) : 1/n \rightarrow 1$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos x/n)$ сходится: $(1 - \cos x/n): 1/n^2 \rightarrow x^2/2$.

Из других признаков сходимости или расходимости ряда отметим два признака, основанных на сравнении рядов с геометрической прогрессией.

Признак Коши. Составим для ряда (A) последовательность $K_n = \sqrt[n]{a_n}$. Если хотя бы при всех достаточно больших n выполняется неравенство $K_n \leq q$, где q — константа, меньшая единицы, то ряд (A) сходится; если же начиная с некоторого номера $K_n \geq 1$, то ряд (A) расходится.

Признак Даламбера. Составим для ряда (A) последовательность $L_n = a_{n+1}/a_n$. Если хотя бы при всех достаточно больших n выполняется неравенство $L_n \leq q$, где q — константа, меньшая единицы, то ряд (A) сходится; если же начиная с некоторого номера $L_n \geq 1$, то ряд (A) расходится.

Интегральный признак Маклорена—Коши. Этот признак по форме отличается от предыдущих. Он основан на идее сравнения ряда с интегралом.

Запишем исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ в виде $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, где функцию f при $x \geq 1$ предположим непрерывной, положительной и монотонно убывающей.

Пусть $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для $f(x)$; так как $f(x) > 0$, то $F(x)$ возрастает и при $x \rightarrow \infty$ имеет предел, конечный или бесконечный. При конечности этого предела ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [F(n+1) - F(n)] \quad (6)$$

сходится, а если предел бесконечный, то этот ряд расходится. С этим рядом и сравним исследуемый ряд.

По теореме Лагранжа о среднем (см. п. 1 раздела 5.2) имеем $F(n+1) - F(n) = f(n + \Theta)$, где $0 < \Theta < 1$. Так как $f(x)$ монотонно убывает, то $a_{n+1} = f(n+1) < F(n+1) - F(n) < f(n) = a_n$.

В случае сходимости ряда (6) по теореме 1 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$, члены которого меньше соответствующих членов ряда (6).

Но тогда и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится. Если же ряд (6) расходится, то и исходный ряд расходится, так как его члены больше соответствующих членов ряда (6).

Отсюда получается *интегральный признак*: при сделанных предположениях ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится в зависимости от того, имеет ли функция $F(x)$ конечный предел при $x \rightarrow \infty$ или нет.

Первообразную $F(x)$ можно взять в виде $\int_1^x f(t) dt$. Как известно, предел этого интеграла при $x \rightarrow \infty$ называют несобственным интегралом $\int_1^{\infty} f(t) dt$ (см. п. 1 раздела 11.1).

Следовательно, рассматриваемый ряд сходится или расходится в зависимости от того, имеет этот интеграл конечное значение или нет.

Существуют и еще более тонкие, и еще более сложные признаки сходимости рядов. Ознакомиться с ними можно в специальной литературе.

4. Знакопеременные ряды. Так называются ряды, в которых положительные и отрицательные члены чередуются. Для таких рядов существует весьма простой и удобный признак сходимости.

Признак Лейбница. Если члены знакопеременного ряда $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots$, где $c_n \geq 0$, монотонно убывают по абсолютной величине и стремятся к нулю, то ряд сходится.

Можно также отметить, что остаток этого ряда имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине.

Пример 4. Простейшие ряды лейбницевского типа $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/(2n-1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$ сходятся по признаку Лейбница.

Поясним еще, что такое абсолютная сходимость ряда. Про ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ говорят, что он сходится абсолютно, если сходится ряд, состав-

ленный из абсолютных величин членов исходного ряда, т.е. если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. В этом случае сходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ясно,

что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ есть положительный и для его сходимости можно использовать весь аппарат, разработанный для положительных рядов (см. п. 3).

Отметим также, что ряд может сходиться, но не абсолютно. Например, первый ряд из примера 4 сходится, но не абсолютно, ибо ряд из абсолютных величин его членов есть ряд гармонический, а этот ряд расходится.

5. Степенные ряды. Так называются ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \quad (7)$$

т.е. как бы бесконечный многочлен.

Теорема 4. Если ряд (7) сходится при $x = d$, то он абсолютно сходится при всяком x , таком, что $|x| < |d|$.

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n d^n = a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \dots$ вытекает, что его общий член стремится к нулю (см. «Г» в п. 2), а значит, ограничен, т.е. $|a_n d^n| \leq M$. Пусть теперь $|x| < |d|$. Так как $|a_n x^n| = |a_n d^n| (|x^n/d^n|) \leq M |x/d|^n$, то члены ряда оказываются меньше соответствующих членов геометрической прогрессии $M + M|x/d| + M|x/d|^2 + \dots$ со знаменателем $|x/d| < 1$.

Значит, эта прогрессия убывающая и поэтому сходящаяся. Следовательно, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ при $|x| < |d|$ сходится (по теореме 1).

Существуют степенные ряды, которые не сходятся ни при каком x , отличном от нуля. Таков, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$, расходимость которого при любом $x \neq 0$ можно установить с помощью признака Даламбера (см. п. 3).

Предположим, однако, что существуют значения x , при которых ряд (7) сходится. Обозначим через S множество таких x . Если это множество не ограничено сверху, то, как следует из теоремы 4, такой ряд абсолютно сходится при любом x , т.е. всюду сходится. Если

же множество S ограничено, то пусть R есть его верхняя граница. Тогда ясно, что при $|x| > R$ ряд (7) расходится, а при $|x| < R$ сходится, и лишь при $x = \pm R$, т.е. всего для двух значений ($x = R$ и $x = -R$), не ясна сходимость ряда. Суммируем все это в теореме.

Теорема 5. Для каждого степенного ряда область сходимости представляет собой сплошной промежуток от $-R$ до R с включением концов или нет; R может быть и нулем, и бесконечностью; внутри промежутка $(-R, R)$ сходимость ряда абсолютная. Число R называется *радиусом сходимости*.

Для нахождения радиуса сходимости поступают следующим образом: составляют последовательность $s_1 = |a_1|$, $s_2 = \sqrt{|a_2|}$, $s_3 = \sqrt[3]{|a_3|}$... Эта последовательность может в общем случае иметь много предельных точек, т.е. пределов своих подпоследовательностей.

Можно доказать, что радиус сходимости равен обратной величине наибольшего из этих пределов.

Пример 5. Определим промежуток и радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n^n$. Образует последовательность $s_n = \sqrt[n]{|a_n|} = n^{1/n}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$, то радиус сходимости $R = 1/1 = 1$. Итак, в промежутке $(-1, 1)$ рассматриваемый ряд сходится абсолютно. Осталось исследовать сходимость на концах промежутка. При $x = -1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n/n^n$ сходится, только если $p > 0$, ибо при $p < 0$ члены ряда не стремятся к нулю. Заметим также, что при $1 > p > 0$ сходимость ряда не абсолютная. При $x = 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ сходится, только если $p > 1$.

ЗАДАЧИ

1. Докажите непосредственно сходимость и найдите суммы рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n(n+1)), \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n(n+3)), \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1/((2n-1)(2n+5)), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3^n + 2^n)/6^n.$$

2. Используя признаки сходимости или расходимости рядов (см. п. 3), установите сходимость или расходимость рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)/(n^2+1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi/2^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n^4+1}.$$

3. Докажите сходимость знакпеременных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n-1)/(2n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^2/2^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/(n - \ln n).$$

4. Найдите радиус сходимости степенных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n/\sqrt{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \cdot x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n/(n + \sqrt{n}).$$

ЧАСТЬ 3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

Многие считают теорию вероятностей наукой трудной для понимания и овладения. В общем, это действительно так. Считают ее абстрактной и далекой от повседневных дел и занятий. А вот это — заблуждение. На самом деле мы сталкиваемся с теорией вероятностей весьма часто и уже к окончанию школы, к моменту поступления в вуз, имеем весьма солидный опыт осмысления различных ситуаций именно с вероятностных позиций. Ибо отвечаем же мы на вопрос приятеля: «Ну, каковы твои шансы на поступление в институт?» что-то вроде: «Думаю, процентов 80 будет». И при этом друг друга понимаем! (Хотя объяснить, что именно имел в виду отвечающий и что именно понял спрашивающий, не всегда сможем). В студенческой аудитории на первой лекции по теории вероятностей я не раз задавал несколько вопросов, связанных с вероятностью, и студенты отвечали совершенно верно. Вопросы не из сложных: «Сколько примерно раз выпадет герб, если монетку подбросить 10 раз?», «Что более вероятно при бросании игрального кубика — выпадение четной цифры или цифры 6?». На более сложные вопросы, типа: «Какие ценные бумаги более надежные — государственные или какой-нибудь корпорации?» — обычно также отвечали вполне правильно. При этом хотелось бы отметить замечательное качество ответов — они были совершенно правильны и к ним, по существу, нечего было добавить и после изучения курса теории вероятностей. Значит, на самом деле эти студенты уже многое знали о теории вероятностей, но пока лишь на интуитивном уровне. Изучение этой теории закрепит, прояснит и весьма расширит это знание, добавив много принципиально нового. Человека, не знающего, кто автор «Анны Карениной», называют невеждой. То же самое, если он не знает, что скорость света является наивысшей для материальных тел. По той же причине каждый культурный человек должен знать хотя бы азы теории вероятностей*, потому что она открывает целый новый мир стохастических закономерностей нашего мироздания. С этих закономерностей и начнем.

Успеха вам, терпения и настойчивости!

* Для углубленного изучения этой науки можно порекомендовать, например, классическую книгу: Вентцель Е.С. Теория вероятностей. — М., 1969.

Тема 15.

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

15.1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Закономерности детерминистические и стохастические. Большинство закономерностей, которые вами изучались до этого, это закономерности типа: «Если сложился комплекс условий A , то обязательно произойдет событие B ». Например, «Если воду при нормальных условиях нагреть до 100°C , то она закипит» или «Если человек подбросит камень вверх, то камень обязательно упадет на землю». Не может быть так, чтобы пять человек подбросили камни, у четверых они упали назад, а у одного завис в воздухе. Такие закономерности называются *детерминистическими* (переведем, как жестко определенные).

Но бывают и случайные события. Например, пять человек подбрасывают монетку и что — у всех должен обязательно выпасть герб? Да ничего подобного.

Событие (например, выпадение герба) потому и называется *случайным*, что оно может произойти, а может и не произойти при воспроизведении соответствующего комплекса условий (подбрасывания монеты).

Еще пример. Остановим на улице случайного человека и, извинившись, попросим его сказать нам, болел ли он в прошлом году. Вряд ли можно спрогнозировать его ответ.

Итак, невозможно предсказать, произойдет ли случайное событие. В одном, единичном опыте — да, предсказать невозможно. Но если посмотреть соответствующую статистику, то окажется, что в 1996 г. житель Москвы в среднем проболел 8 дней*. Отметим, что, например, для соответствующего отдела правительства Москвы нет особого смысла знать, болел ли конкретный Сидоров М.М. в 1996 г. или нет. Ведь этот отдел принимает решения, касающиеся больших масс населения Москвы (заказ лекарств, строительство новых больниц и т.п.), и в этом смысле информация об отдельном человеке не

* Вся подобная информация в данном пособии условна и приблизительно.

столь уж важна. (Правда, смотря кто этот человек. Так, по сообщениям печати, на знаменитую операцию Ельцина 5 ноября 1996 г. и его последующее лечение ушло из бюджета Минздрава России 32 млрд руб.) И для принятия таких решений — касающихся больших масс населения Москвы, важна именно обобщенная или усредненная информация.

Итак, огромный массив происшедших случайных событий — болезней конкретных москвичей в 1996 г. — имеет, оказывается, четкую закономерность: в среднем на одного жителя Москвы в 1996 г. пришлось восемь дней болезни. Такого рода закономерности — закономерности больших массивов случайных событий — и называются *стохастическими* закономерностями (переведем как закономерности случайного).

Такого рода закономерности совсем нередки, более того, они окружают нас со всех сторон. Приведем примеры.

Пример 1. В 1996 г. на овощехранилища Москвы завезено 1 млн т картофеля, значит, в среднем житель Москвы за осень—зиму—весну 1996—1997 гг. съел около 100 кг картофеля; но разве каждый москвич съел столько — нет, конечно.

Пример 2. Женатые мужчины проводят больше времени перед телевизором, чем неженатые.

Пример 3. В 1996 г. жители Москвы заплатили больше налогов, чем в 1995 г.

В каждом из этих примеров указанная закономерность характеризовала большую совокупность в целом, при этом о произвольном элементе этой совокупности без знакомства с ним, как правило, ничего конкретного (по этому поводу) сказать было нельзя. Именно в этом отличие стохастических закономерностей от детерминистических — последние описывают каждый элемент совокупности, а первые (стохастические) — только всю совокупность в целом.

Такая исследуемая большая совокупность называется *генеральной совокупностью*. Она может быть в теоретическом плане даже бесконечной. Предположим, что элементы этой совокупности X исследуются на наличие некоторого свойства, признака a . Пусть A — подмножество элементов, обладающих этим свойством. Когда берем произвольный элемент x , то он может обладать свойством a или нет. Пусть мы отобрали для исследования несколько элементов, такое подмножество W обычно называют *выборкой*. Напомним, что число элементов произвольного множества Y обозначается $|Y|$. Значит, $|W|$ есть число элементов выборки, или объем выборки. Заметим, что $W \cap A$ есть множество тех элементов выборки, которые обладают свойством a , значит, $|W \cap A|$ есть число элементов выборки, обладающих свойством a ; число $|W \cap A|/|W|$ есть доля элементов A в выборке W .

Рассмотрим теперь все большие и большие по объему выборки W , затрагивающие почти всю совокупность X . Некоторым естественным образом можно определить предел $\lim |W \cap A|/|W|$, который вполне разумно считать *долей* A в X . Будем обозначать его $P(A)$. Трактовка $P(A)$ очень проста — пусть, например, $P(A) = 1/3$, тогда можно сказать, что третья часть всех элементов совокупности X принадлежит к A , т.е. обладает свойством a . Несомненно, что $P(A)$ относится к характеристикам совокупности X и в определенном смысле является стохастической закономерностью распределения элементов подмножества A , т.е. обладающих свойством a в совокупности X .

2. Частота и вероятность. На начальном этапе изучения теории вероятностей (ТВ) будем рассматривать очень простые случайные события. Отметим еще раз, что случайное событие неразрывно связано с некоторым опытом, при проведении которого оно, событие, происходит или нет. Такими простейшими опытами являются подбрасывание монеты или игрального кубика. Монету будем считать симметричной, очень тонкой (теоретически бесконечно тонкой), однородной по плотности; на одной стороне монеты помещен герб, на другой — решка. Игральный кубик представляет геометрически правильный куб, однородный по плотности; на его гранях нанесены цифры от 1 до 6. С подбрасыванием монеты связаны два случайных события: падение монеты гербом вверх — обозначим это событие G , или решкой — R . С бросанием игрального кубика связано больше случайных событий: например, шесть событий $e_i = \text{«после остановки кубика на его верхней грани оказалась цифра } i\text{»}$, $i = 1, \dots, 6$; или события $D = \text{«выпала четная цифра»}$; или $N = \text{«выпала нечетная цифра»}$ и т.д.

Обратимся лишь к интуиции и к обычному смыслу слов «более возможно», «равновозможно» и т.п. и проанализируем рассмотренные события. Из симметрии монеты вытекает, что ни одно из событий G, R не более возможно, чем другое, поэтому заключаем, что события G и R равновозможны. По той же причине все события e_i , $i = 1, \dots, 6$, также равновозможны. С другой стороны, событие D явно более возможно, чем любое событие e_i , $i = 1, \dots, 6$.

Однако такая характеристика «случайности» события, т.е. с помощью слов «более возможно», «равновозможно» и т.д., является лишь качественной. Попытка количественной оценки приводит к такому понятию «вероятности».

Определение 1. Вероятность события есть мера возможности наступления этого события при проведении опыта.

Далее мы придадим этому определению точный смысл.

Рассмотрим теперь некоторое случайное событие A , происходящее или нет при проведении соответствующего опыта. Повторим этот опыт несколько раз, например n раз, стараясь проводить эти опыты в одинаковых условиях и независимо друг от друга. Говорят, что такие опыты образуют *серию $\mathcal{E}$ длиной n* .

Пусть событие A произошло в серии $\mathcal{E}$ столько-то раз, например k . Тогда величина k/n называется *частотой события A в серии $\mathcal{E}$* и обозначается $\gamma(A, \mathcal{E})$. Ясно, что $0 \leq \gamma(A, \mathcal{E}) \leq 1$. Заметим также, что для двух различных серий $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ даже одной длины скорее всего $\gamma(A, \mathcal{E}_1) \neq \gamma(A, \mathcal{E}_2)$. Однако при проведении серий $\mathcal{E}_i, i = 1, 2, \dots$, все большей и большей длины величины $\gamma(A, \mathcal{E}_i)$ начнут сгущаться и стабилизироваться в следующем смысле — сначала стабилизируется 1-я цифра после запятой p_1 , затем 2-я — p_2 и т.д. Полученное в пределе число $0, p_1 p_2 \dots$ и нужно считать вероятностью события A . Обычно вероятность обозначается буквой P (от английского слова «probability» — вероятность). Довольно понятно с этой точки зрения, что вероятности указанных выше событий таковы: $P(G) = P(R) = 1/2$, $P(D) = 1/2$, $P(e_i) = 1/6$ для любого $i = 1, \dots, 6$.

На самом деле связь частоты и вероятности события сложнее, чем только что описано. К объяснению этой связи еще вернемся в конце курса ТВ (см. теорему Бернулли в п. 2 раздела 17.1). Пока же можно ограничиться следующим выводом.

Определение 2. Вероятность случайного события есть абстракция от его частоты наступления в длинных сериях опытов.

Такое понимание вероятности ближе к практике, зато вышеуказанное определение (см. определение 1) дает возможность быстро развить теоретическое представление о вероятности.

3. Классическая формула подсчета вероятности. Известно, что ТВ началась с анализа салонных игр (т.е. карточных игр типа покера, преферанса или игр типа домино и т.п.). В таких играх многие комбинации карт (или других элементов игры) равновозможны. Это достигается одинаковостью изнанок карт и требованием тщательно тасовать карты перед сдачей и т.п.

Пример 4. Рассмотрим, например, «Задачу преферансиста». Играют трое. Сдающий раздает по 10 карт каждому участнику и 2 карты оставляет в «прикупе» (всего в преферансной колоде 32 карты — нет шестерок). Какова вероятность того, что в прикупе два туза?

Решение. Задача эквивалентна более простой — берем две карты из колоды в 32 карты; какова вероятность того, что это тузы?

Посмотрим, сколько всего различных комбинаций в две карты, образованных из данных 32. Элементарные подсчеты показывают, что $n = (32 \times 31)/2 = 496$. А сколько из этих комбинаций состоят только из тузов?

Тоже несложно подсчитать: $m = (4 \cdot 3)/2 = 6$. Дробь $m/n = 6/496 \approx 1/83$ и есть искомая вероятность.

Именно такие подсчеты и были в начале развития ТВ. В основе их лежит следующая классическая формула.

Классическая формула для подсчета вероятностей. Пусть событие A насчитывает $m(A)$ случаев, а всего случаев n , тогда $P(A) = m(A)/n$.

Осталось пояснить, что такое случаи.

События B , C называются *несовместными*, если они не происходят вместе в одном опыте. Например, вышеуказанные события G , R (см. п. 2) несовместны.

Группа событий называется *полной*, если при проведении опыта всегда происходит какое-то из этих событий. Опять-таки, события G , R образуют полную группу.

Случаи — это равновозможные попарно несовместные события, образующие полную группу.

Запомнить и в каком-то смысле понять классическую формулу проще всего с помощью «вероятностного пирога». Представим пирог, разделенный на n равных секторов-случаев, а часть A пирога состоит из $m(A)$ таких секторов-случаев, тогда ее доля есть $m(A)/n$.

С помощью классической формулы можно найти вероятности далеко не всех событий. Ведь классическая формула применима только лишь, если все исходы опыта можно разделить на группу случаев, причем событие, вероятностью которого интересуемся, состоит из нескольких таких случаев. Особенно тщательно надо убедиться в равновозможности случаев. Почти всегда это следствие какой-то симметрии, которой обладает опыт.

Так, прямо в описании монеты или игрального кубика подчеркнута их симметрия. Отсюда вытекает, что в опыте с подбрасыванием монеты события G и R образуют полную группу случаев, следовательно, вероятность каждого из этих событий равна $1/2$. Для опыта с подбрасыванием кубика шесть событий e_i , $i = 1, \dots, 6$ образуют случаи. Следовательно, $P(e_i) = 1/6$. Отметим, что два события D и N (см. п. 2) также образуют полную группу из двух случаев и эти случаи отличны от e_i , $i = 1, \dots, 6$. Выделение группы случаев определяется часто соображениями удобства, простоты вычислений и т.п.

Очень важно понять, что при использовании классической формулы числа n и $m(A)$ можно считать «с открытыми глазами» — ведь это просто числа некоторых комбинаций (карт или чего-нибудь подобного). Далее будут приведены примеры таких подсчетов.

Пример 5. Брошены сразу два игральных кубика. Найти вероятность того, что: а) сумма выпавших очков четная; б) произведение выпавших очков больше 20.

Решение. Используем классическую формулу. Назовем один из кубиков белым, другой — черным. Пусть A — событие из «а», B — событие из «б». Убеждаемся, что 36 событий e_{ik} = «на белом кубике выпала цифра i , на черном — цифра k » являются случаями — они равновозможны и образуют полную группу. Поэтому $n = 36$. Событие A насчитывает 18 случаев, событие B — шесть случаев $\{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$. Следовательно, $P(A) = 18/36 = 1/2$, $P(B) = 1/6$.

4. Элементы комбинаторики. Комбинаторика занимается подсчетом числа различных комбинаций. Из них наибольшее применение в ТВ нашли перестановки, размещения и сочетания.

Размещениями из n элементов по m называются упорядоченные наборы в m элементов, взятых из данных n . Число всех размещений из n по m обозначается A_n^m и равно $A_n^m = n(n-1) \dots (n-m+1)$. Размещения отличаются составом элементов или их порядком.

Перестановками элементов множества называются упорядоченные наборы из всех элементов множества. Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n и равно $P_n = n! = n(n-1) \dots 1$. Перестановки не могут отличаться составом и отличаются только порядком элементов в них.

Сочетаниями из n элементов по m называются наборы (неупорядоченные) в m элементов, взятых из данных n . Число всех сочетаний из n по m обозначается C_n^m и равно $C_n^m = A_n^m / P_m = n(n-1) \dots (n-m+1) / m!$. Сочетания должны отличаться составом элементов.

Пример 6. Из колоды в 36 карт возьмем наугад три. Какова вероятность того, что это будут дама бубен и два туза?

Решение. Пусть A — искомое событие, тогда по классической формуле $P(A) = m(A)/n$, где $m(A)$ — число всех троек, состоящих из дамы бубен и двух тузов, а n — число всевозможных троек из 36 карт. Покажем, как это — считать числа $m(A)$ и n «с открытыми глазами» (см. абзац перед примером 5). Перевернем все карты рубашками вверх. Поскольку в событии A дама бубен обязательно должна быть — возьмем ее и сразу отложим в сторону. Теперь к ней надо добавить два туза. Это можно сделать $C_2^2 = (4 \cdot 3)/2$ способами. Число же $n = C_{36}^3 = (36 \cdot 35 \cdot 34)/3!$. Итак, $P(A) = ((4 \cdot 3)/2) / ((36 \cdot 35 \cdot 34)/3!) = 1/1190$.

ЗАДАЧИ

1. Рыбаки поймали в пруду 100 рыб, окольцевали их и выпустили назад в воду. На следующий день они поймали 120 рыб, из них 10 оказались окольцованными. Сколько рыб в пруду? Рыбак поймал одну рыбу. Какова вероятность того, что она окольцована?

Решение. Пусть x — число рыб в пруду, тогда дроби $100/x$ и $10/120$ должны быть примерно равными. Следовательно, всего рыб приблизительно 1200. Искомая вероятность примерно равна $100/1200 = 1/12$.

2. Из шести букв М, А, Ш, И, Н, А выбираются одна за другой и приставляются друг к другу в порядке выбора четыре буквы. Найти вероятность того, что при этом получится слово: а) ШИНА; б) МАША.

Решение. Используем классическую формулу. Пусть X — событие из «а», Y — событие из «б». Получаемые комбинации есть размещения, поэтому $n = A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. Так как букв А две, то $m(X) = 2$, $m(Y) = 2$. Итак, $P(X) = 2/360 = 1/180$, $P(Y) = 1/180$.

3. В ящике 10 стандартных деталей и 3 нестандартные, на ощупь неотличимые. Токарь берет сразу две детали. Найти вероятность того, что среди них окажутся: а) ровно одна нестандартная, б) ровно две нестандартные.

Решение. Применение классической формулы возможно из-за слов «на ощупь неотличимые». Пусть X — событие из «а», Y — событие из «б». Получаемые комбинации есть сочетания, поэтому $P(X) = (C_{10}^1 \cdot C_3^1) / C_{13}^2$, $P(Y) = C_3^2 / C_{13}^2$. После вычислений получаем $P(X) = 5/143 \approx 1/30$, $P(Y) = 1/286$.

4. Подбросим спичечный коробок. Можно ли применить классическую формулу для нахождения вероятности падения его этикеткой спичечной фабрики вверх?

Ответ. Нельзя, так как не удается определить подходящую группу случаев. Искомую вероятность можно определить приближенно, используя связь частоты и вероятности (см. п. 2).

5. Придумать случайное событие, имеющее вероятность $3/7$.

Решение. Сделаем 7 одинаковых листиков бумаги и на трех из них поставим крестик. Положим все бумажки в шляпу, встряхнем ее и предложим вытащить одну бумажку. Вероятность того, что удастся вытащить бумажку с крестиком, равна $3/7$.

6. Найдите A_5^1 , A_5^2 , C_5^2 , C_5^3 , P_4 , P_6 .

7. Шеститомное собрание сочинений расставляется наугад на полке. Найдите вероятность того, что том 1 и том 2 окажутся: а) рядом; б) через один том.

8. В ящике 20 одинаковых деталей, 15 из них сделаны на заводе № 1, остальные — на заводе № 2. Токарь берет одну за другой три детали. Найдите вероятность того, что все эти детали сделаны: а) на заводе № 1; б) на заводе № 2.

9. Обезьянке позволили семь раз ударить по клавишам пишущей машинки (для упрощения считаем, что на клавиатуре машинки 33 буквы русского алфавита и 10 цифр). Найдите вероятность того, что она напечатает слово: а) ПРИМАТЫ; б) ЧЕЛОВЕК.

10. В конверте восемь мужских и две женские фотографии. Из конверта берут четыре фотографии. Какова вероятность того, что из них: а) ровно две женские фотографии; б) есть хотя бы одна женская фотография.

15.2. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВЕРОЯТНОСТИ

1. Операции над событиями. Из событий можно получать другие события. Пусть A, B — произвольные события, связанные с каким-нибудь опытом.

Событие называется *противоположным* событию A , если оно происходит только тогда, когда A не происходит. Такое событие обозначается $\bar{A}$.

Суммой событий A, B называется событие, происходящее, если только произошло событие A , или событие B , или оба события A, B . Сумма событий обозначается $A \cup B$.

Пересечением событий A, B называется событие, происходящее, если только произошли и событие A , и событие B , т.е. произошли оба события A, B . Пересечение событий обозначается $A \cap B$.

Определения суммы и пересечения событий естественным образом распространяются на любой набор событий.

Легко понять, что совокупность всех событий, связанных с данным опытом, замкнута относительно операций образования противоположного события, суммы и пересечения событий. Эта совокупность называется *пространством событий* или *алгеброй событий* (связанных с данным опытом). Будем обозначать ее Ω .

В эту совокупность включают и еще два события — вовсе не случайных уже, но рассматриваемых как крайние пределы случайных.

Событие называется *невозможным*, если оно никогда не происходит при проведении опыта. Невозможное событие обозначается $\emptyset$ (символ пустого множества).

Событие называется *достоверным*, если оно всегда происходит при проведении опыта. Достоверное событие обозначается Ω (от английского «universal» — всеобщий).

Пример 1. Рассмотрим опыт с подбрасыванием монеты. Пространство событий Ω содержит четыре события: $\emptyset, \Omega$, падение монеты гербом вверх G и падение монеты решкой вверх R . Отметим, что события G, R противоположны друг другу.

Пример 2. Рассмотрим опыт с бросанием игрального кубика. Пространство событий Ω содержит $2^6 = 64$ события: $\emptyset, \Omega$, шесть событий $e_i, i = 1, \dots, 6$; события $D =$ «выпала четная цифра» и $N =$ «выпала нечетная цифра» и т.д. Отметим, что события D, N противоположны друг другу.

При рассмотрении пространства событий некоторые события целесообразно называть *элементарными*. Это такие события, из которых можно «составить» все интересующие нас события. В примере 2 такими событиями являются шесть событий e_i , $i = 1, \dots, 6$. В этом примере эти события в самом деле элементарны — они являются мельчайшими неразложимыми далее событиями. Множество элементарных событий обозначается ω . Любое событие состоит из элементарных и может быть отождествлено с соответствующим подмножеством этих элементарных событий. В примере 2 событие D есть $\{e_2, e_4, e_6\}$, событие $N = \{e_1, e_3, e_5\}$.

Пример 3. Рассмотрим опыт с бросанием сразу двух игральных кубиков: белого и черного (см. пример 5, п. 3, раздел 15.1). Убеждаемся, что 36 событий $e_{ik} =$ «на белом кубике выпала цифра i , на черном — цифра k » являются элементарными. Событие «произведение выпавших очков больше 20» есть $\{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$.

При отождествлении каждого события с подмножеством элементарных событий вышеприведенные операции над событиями получают теоретико-множественную трактовку. Именно событию, противоположному событию A , соответствует дополнение $\omega \setminus A$, сумме событий A, B соответствует подмножество $A \cup B$, пересечению событий A, B — подмножество $A \cap B$ (таким образом, обозначения результатов операций, определенных в начале раздела, были не случайны и оказались согласованными с теоретико-множественной трактовкой операций).

Кроме рассмотренных операций, над событиями возможны и другие операции. Например, разность событий A и B происходит только в случае, если происходит A и не происходит B , обозначается $A \setminus B$.

Пример 4. Запишите с помощью операций $\setminus, \cup, \cap$ события, состоящие в том, что из событий A, B, C : а) произошло только A ; б) произошли A и B , а C не произошло; в) по крайней мере одно произошло.

Ответ: а) $A \setminus (B \cap C)$ или $(A \setminus B) \setminus C$; б) $(A \cap B) \setminus C$; в) $A \cup B \cup C$.

При помощи операций над событиями можно выразить другим образом введенные ранее понятия. Так, группа событий является *полной*, если сумма всех входящих в нее событий есть достоверное событие. События A, B *несовместны*, если их пересечение есть невозможное событие, и т.д.

2. Аксиоматический подход к вероятности. Теперь можно дать предварительное определение вероятности, которое вполне достаточно для целей практики, но будет уточнено в дальнейшем для развития теории.

Определение. *Вероятность* есть функция P , сопоставляющая каждому событию число от 0 до 1, причем можно отметить следующие ее свойства. Еще одно свойство вероятности приведено чуть ниже.

Свойство 1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\mathcal{U}) = 1$.

Свойство 2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ для любых несовместных событий A, B .

Напомним, что события A, B называются *несовместными*, если они не происходят вместе при проведении опыта. Например, вышеуказанные события G, R (см. пример 1, п. 1) несовместны.

В разделе 15.1, п. 2 (см. определение 1) указывалось, что вероятность есть мера возможности наступления события при проведении опыта. Мерами являются масса тела, площадь земельного участка, объем тела и т.п. Главное свойство всякой меры состоит в том, что мера суммы двух объектов без общих элементов равна сумме мер. Это свойство мер называется *аддитивностью*. Для вероятности как меры свойство 2 также главное.

По индукции можно доказать, что вероятность суммы любого конечного семейства попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей. Это свойство называется *конечной аддитивностью*.

Проверим, что классическая формула нахождения вероятности (см. п. 3, раздел 15.1) удовлетворяет определению вероятности. Действительно, невозможное событие $\emptyset$ не содержит ни одного случая, поэтому $m(\emptyset) = 0$, следовательно, $P(\emptyset) = 0$. Достоверное же событие $\mathcal{U}$ содержит все случаи, поэтому $m(\mathcal{U}) = n$, следовательно, $P(\mathcal{U}) = 1$. Далее, если события A, B несовместны, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, следовательно, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Для развития теории свойство 2 заменяют более сильным свойством 3 (счетной аддитивности).

Свойство 3. $P(A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$ для любых попарно несовместных событий $A_1, \dots, A_n, \dots$.

Классическая формула имеет и это свойство, поскольку вероятностное пространство, конструируемое при использовании этой формулы, конечно; тем самым не существует бесконечных семейств попарно несовместных различных событий.

Если от вероятности требовать счетной аддитивности, то и от пространства событий также надо требовать замкнутости по операциям образования сумм и пересечений счетных семейств. Такие пространства или алгебры событий называются *σ -алгебрами событий*.

Свойство счетной аддитивности эквивалентно следующему свойству вероятности, которое понадобится в дальнейшем.

Свойство 4. Если $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ — расширяющаяся последовательность событий, т.е. $A_n \subseteq A_{n+1}$ и $A = \bigcup \{A_n; n \in \mathbb{N}\}$, тогда $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$.

Доказательство. Пусть $K_1 = A_1$ и $K_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$ для $n \in N$, тогда $A = \bigcup \{K_n : n \in N\}$ (рис. 1), причем события K_n , $n \in N$ попарно несовместны. По счетной аддитивности вероятности

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n P(K_i) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

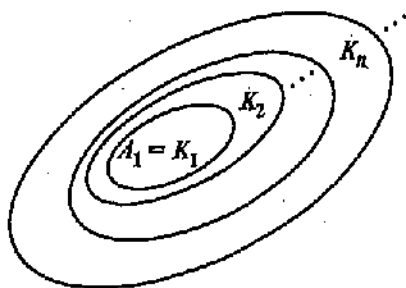


Рис. 1

Выведем два следствия из определения вероятности.

Следствие 1. Вероятность события, противоположного событию A , равна $1 - P(A)$.

Действительно, так как A и $\bar{A}$ несовместны, то $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\mathcal{U}) = 1$, значит, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Следствие 2. Для любых двух событий A, B имеем: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. (Эта формула называется *расширенной формулой сложения*.)

Действительно, $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$ и, так как события $(B \setminus A)$ и $(B \cap A)$ несовместны, то $P(B) = P(B \setminus A) + P(B \cap A)$. Далее, $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. События A и $(B \setminus A)$ также несовместны, значит, $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$, и, подставляя в эту формулу $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$, получаем окончательно: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Пример 5. Расположите следующие события в порядке возрастания их вероятностей (A, B — произвольные события): невозможное событие $\emptyset$, достоверное событие $\mathcal{U}$, A , $A \cup B$, $A \cap B$.

Ответ: $\emptyset$, $A \cap B$, A , $A \cup B$, $\mathcal{U}$.

3. Условная вероятность. Зависимость и независимость событий. Вероятность события A , найденная при условии, что событие B произошло, называется *условной вероятностью* события A по отношению к событию B и обозначается $P_B A$.

При аксиоматическом подходе к вероятности условная вероятность определяется по формуле $P_B A = P(A \cap B) / P(B)$ (и только по отношению к событию ненулевой вероятности, т.е. должно быть $P(B) \neq 0$).

Пример 6. Рассмотрим опыт с бросанием игрального кубика. Пусть D = «выпавшая цифра четная», а Q = «выпавшая цифра меньше четырех». Тогда $P_D Q = 1/3$, $P_Q D = 1/3$.

Перепишем определение условной вероятности и получим: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_B A$. Это так называемая *теорема (или формула)*

умножения вероятностей. Эта формула допускает дальнейшие обобщения. Так, для трех событий имеем: $P(A \cap B \cap C) = P(A) P_A B P_{AB} C$ и т.д.

Формула умножения может быть использована для эффективного вычисления некоторых вероятностей.

Пример 7. В урне лежат три белых шара, три черных и три желтых. Берем сразу три шара. Найти вероятность того, что все три шара окажутся: а) одинакового цвета; б) разного цвета.

Решение. Ничто не мешает нам считать, что шары вынимаем один за другим через малые промежутки времени. Будем пытаться вынимать их так, чтобы получилось нужное нам событие. Для события «а» первый шар может быть любого цвета; но второй должен быть того же цвета, что и первый, и вероятность этого $2/8$; третий шар должен быть того же цвета и вероятность этого уже $1/7$. По формуле произведения вероятностей получаем $P = 1(2/8)(1/7) = 1/28$. Для события из «б» аналогично имеем: $P = 1(6/8) \times (3/7) = 9/28$.

Понятия зависимости и независимости событий относятся к важнейшим в теории вероятностей.

Событие A называется *независимым* (зависимым) от события B , если вероятность события A равна (не равна) его условной вероятности по отношению к событию B , т.е. $P(A) = P_B A$ (соответственно $P(A) \neq P_B A$).

Докажем, что независимость или зависимость событий взаимна, т.е. если B не зависит от A , то и A не зависит от B . Пусть B не зависит от A , т.е. $P_A B = P(B)$, тогда по формуле умножения вероятностей имеем: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A B = P(A) \cdot P(B)$. По формуле умножения имеем: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B A$; значит, $P(A) = P_B A$, т.е. A не зависит от B (здесь принято, что $P(B)$ и $P(A)$ не равны нулю).

Одновременно доказано, что независимость событий A, B эквивалентна выполнению формулы $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, так что выполнение этой формулы вполне можно взять за определение независимости событий A, B .

Часто зависимость или независимость событий есть следствие их физической независимости. Рассмотрим следующий пример.

Пример 8. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий: а) только одно стандартно; б) оба стандартны.

Решение. Пусть событие C_1 — «первое изделие стандартно», C_2 — «второе изделие стандартно». Пусть A — событие из «а», B — событие из «б». Тогда $A = (C_1 \cap \bar{C}_2) \cup (\bar{C}_1 \cap C_2)$, причем события $(C_1 \cap \bar{C}_2)$ и $(\bar{C}_1 \cap C_2)$ несовместны. Кроме того, очевидно, что события C_1, C_2 независимы (они физически независимы!); можно доказать, что отсюда вытекает независимость событий C_1 и $\bar{C}_2$, а также $\bar{C}_1$ и C_2 (см. задачу 4 далее). Суммируя все

это, получаем: $P(A) = P(C_1 \cap \bar{C}_2) + P(\bar{C}_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot (1 - P(C_2)) + (1 - P(C_1)) \cdot P(C_2) = 2 \cdot (0,9 \cdot 0,1) = 0,18$.

ЗАДАЧИ

1. Дано $P(A) = 0,6$; $P(A \cup B) = 0,8$; $P(A \cap B) = 0,5$. Найти $P(B)$, $P_A B$, $P_B A$ и выяснить, зависимы ли события A , B .

Решение. Используем формулы из пп. 2, 3. По расширенной формуле сложения имеем: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Следовательно, $P(B) = 0,8 + 0,5 - 0,6 = 0,7$. Далее по формуле для условной вероятности имеем: $P_A B = P(A \cap B)/P(A) = 0,5/0,6 = 5/6$. Аналогично $P_B A = 5/7$. Поскольку $P(A \cap B) = 0,5$, $P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42$, то $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$; следовательно, A и B зависимы.

2. Дано: $P(A) > 0,5$; $P(B) > 0,8$. Могут ли такие события A и B : а) быть несовместными, б) взаимно дополнительными? Верно ли, что $P(A \cap B) > 0,2$?

Решение. Предположим, что A и B несовместны, тогда событие $A \cup B$ имело бы вероятность $P(A \cup B) = P(A) + P(B) > 1,3 > 1$, что невозможно. Тем более A и B не могут быть взаимно дополнительными — ведь взаимно дополнительные события заведомо несовместны. Используя расширенную формулу сложения вероятностей (см. п. 2), получаем, что $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) > 1,3 - P(A \cup B) > 1,3 - 1 > 0,3$. Тем более $P(A \cap B) > 0,2$.

3. На схеме (рис. 2) около каждого реле указана вероятность замыкания им своего участка цепи при подаче на него управляющего тока: Реле работают независимо друг от друга. Найти вероятность того, что цепь ab окажется замкнутой, если на все реле подать управляющий ток.

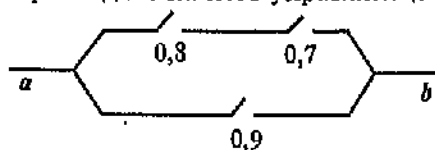


Рис. 2

Решение. Пусть C , D , E — это замыкания соответствующих реле своего участка цепи, тогда $P(C) = 0,8$; $P(D) = 0,7$; $P(E) = 0,9$. Пусть X — замыкание цепи ab , тогда $X = (C \cap D) \cup E$. По расширенной формуле сложения имеем: $P(X) = P(C \cap D) + P(E) - P((C \cap D) \cap E)$. Далее воспользуемся независимостью работы реле. Это дает: $P((C \cap D) \cap E) = P(C) \cdot P(D) \cdot P(E)$. Учитывая все это, получаем окончательно: $P(X) = 0,8 \cdot 0,7 + 0,9 - 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,9 + 0,56 \cdot 0,1 = 0,956$.

4. Доказать, что если события A и B независимы, то пары событий A и $\bar{B}$; $\bar{A}$ и B тоже независимы.

Решение. $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\bar{B})$.

5. Два футболиста с середины поля поочередно бьют по воротам до первого попадания. Меткость 1-го игрока равна 0,5, 2-го — 0,4. Найти вероятность того, что попадет первым 1-й игрок.

Решение. Обозначим событие «первым попал 1-й игрок» через A . Тогда $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup \dots$, где A_k обозначает событие « k -м своим ударом 1-й попал в ворота, а до этого оба игрока промахнулись». Легко понять, что $P(A_k) = (0,5 \cdot 0,6)^{k-1} \cdot 0,5$. Так как события $A_k, k \in N$

попарно несовместны, то $P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (0,5 \cdot 0,6)^{k-1} \cdot 0,5$. Но это есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $(0,5 \cdot 0,6) = 0,3$, следовательно, ее сумма и искомая вероятность равны $0,5/(1 - 0,3) = 5/7$.

6. Запишите с помощью операций $\neg, \cup, \cap$ события, состоящие в том, что из событий A, B, C : а) все три произошли; б) A произошло, а B и C нет; в) по крайней мере одно произошло.

7. Расположите события в порядке убывания их вероятностей (A, B, C — произвольные события): $A \cap B \cap C, A \cap C, A \cup B \cup C, B \cup C, B \cup (C \cap A)$.

8. Дано $P(A) = 0,8; P(A \cap B) = 0,5; P_B A = 0,5$. Найдите $P(B), P_A B, P(A \cup B)$ и выясните, зависимы ли события A, B .

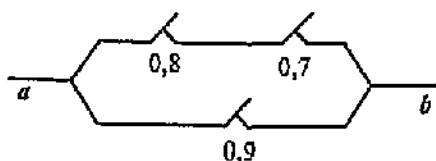


Рис. 3

9. На схеме (рис. 3) около каждого реле указана вероятность разрыва им своего участка цепи при подаче на него управляющего тока. Реле работают независимо друг от друга. Найдите вероятность разрыва цепи ab , если на все реле подать управляющий ток.

10. Из шести букв М, А, Ш, И, Н, А выбираются одна за другой и приставляются друг к другу в порядке выбора четыре буквы. Найдите вероятность того, что при этом получится слово: а) ШИНА; б) МАША.

Решите эту задачу (в разделе 15.1 она имела № 2), используя формулу умножения вероятностей.

11. В доме три совершенно одинаковых лифта, работающих независимо друг от друга. Вероятность того что в течение суток хотя бы один лифт откажет, равна 0,2. Какова вероятность отказа в сутки лифта № 3?

12 (Задача Банаха). Спички в полной коробке отсырели и зажигаются с вероятностью 0,5. Друзья по очереди пытаются зажечь спичку. Какова вероятность того, что это удастся первым сделать первому?

15.3. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

1. **Формула полной вероятности.** Иногда о ситуации, в которой проводится опыт, можно высказать некоторые предположения, при которых опыт протекает уже более просто. Такого рода предположения называются также *гипотезами*.

Пусть рассматривается событие A , которое происходит только вместе с некоторыми попарно несовместными гипотезами $H_1, \dots, H_n$, тогда $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}A + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}A$.

Эта формула называется *формулой полной вероятности*.

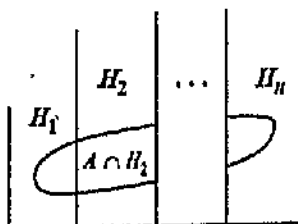
Пример 1. В цехе три группы станков производят одни и те же детали. Производительность их одинакова, но качество работы различно. Известно, что станки первой группы дают 3% брака, второй группы — 5% и третьей группы — 4%. Все произведенные в цехе детали в нерассортированном виде сложены на складе. Найти вероятность того, что наугад взятая оттуда деталь окажется бракованной, если станков первой группы пять, второй — четыре и третьей — три.

Решение. Возможны три предположения: H_1 — деталь сделана на станках первой группы, H_2 — на станках второй группы, H_3 — третьей группы. Пусть A — событие «деталь окажется бракованной», тогда по формуле полной вероятности имеем: $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}A + P(H_2) \cdot P_{H_2}A + P(H_3) \cdot P_{H_3}A$. Легко понять, что $P_{H_i}A$ — это вероятность брака для станков i -й группы, а $P(H_1) = 5/12$, $P(H_2) = 4/12$, $P(H_3) = 3/12$. Подставляя все это в формулу, получим: $P(A) = 47/1200 \approx 1/26$.

Докажем формулу полной вероятности

(см. рисунок для графической иллюстрации). То, что событие A происходит вместе с гипотезами $H_1, \dots, H_n$, означает, что $A \subseteq H_1 \cup \dots \cup H_n$. Но тогда $A = (A \cap H_1) \cup \dots \cup (A \cap H_n)$ и события $(A \cap H_1), \dots, (A \cap H_n)$ попарно несовместны, значит, $P(A) = P(A \cap H_1) + \dots + P(A \cap H_n)$. Далее,

по формуле умножения вероятностей имеем: $P(A \cap H_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}A$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}A + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}A$.



2. **Формула Байеса.** Для того чтобы понять следующую формулу — формулу Байеса, рассмотрим пример.

Пример 2. Вторая смена в цехе производит в два раза меньше изделий, чем первая, а брак у нее в 1,5 раза больше. Детали от обеих смен в нерассортированном виде сложены вместе. Взятая оттуда деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она сделана второй сменой.

Решение. Решим эту задачу пока без всяких готовых формул. Пусть вторая смена произвела n изделий, тогда первая — $2n$ изделий. Пусть брак у первой смены есть $r\%$, тогда у второй — $1,5r\%$. Следовательно, всего бракованных изделий $(2nr + 1,5nr)/100$. Доля второй смены в этой совокупности $1,5nr/(2nr + 1,5nr) = 1,5/3,5 = 3/7$. Это и есть ответ.

Теперь выведем формулу Байеса и затем еще раз решим задачу с помощью этой формулы. Про деталь в нерассортированной груде деталей можно предположить, что она: H_1 = «сделана первой сменой» или H_2 = «сделана второй сменой». При этом $P(H_1) = 2/3$, $P(H_2) = 1/3$. Эти вероятности называются *априорными* (доопытными). Возьмем деталь из груды. Когда узнаем, что деталь бракованная, то тем самым констатируем, что случилось некоторое событие, обозначим его через A . Получается, что уже взята не произвольная деталь из груды, а взята деталь из некоторого подмножества (в данном случае из подмножества бракованных деталей). Когда в этой ситуации интересуются, какой сменой сделана деталь: первой — событие H_1 или второй — событие H_2 , то речь идет уже об условных вероятностях: $P_A H_1$ или $P_A H_2$. Эти вероятности называются *апостериорными* (послеопытными). Найдем вторую из этих вероятностей. По формуле для условной вероятности имеем: $P_A H_2 = P(A \cap H_2)/P(A)$. По формуле умножения вероятностей находим числитель: $P(A \cap H_2) = P(H_2) \cdot P_{H_2} A$, а по формуле полной вероятности находим знаменатель: $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1} A + P(H_2) \cdot P_{H_2} A$. Подставляя, получаем окончательно формулу Байеса: $P_A H_2 = P(H_2) \cdot P_{H_2} A / (P(H_1) \cdot P_{H_1} A + P(H_2) \cdot P_{H_2} A)$ — для двух гипотез. В общем случае — для n гипотез — формула Байеса такова:

$$P_A H_i = P(H_i) \cdot P_{H_i} A / \left(\sum_{k=1}^n P(H_k) \cdot P_{H_k} A \right).$$

Применим теперь формулу Байеса в примере 2. Имеем: $P_{H_2} A = (3/2) \cdot P_{H_1} A$. Подставляя этот результат в формулу Байеса, получим: $P_A H_2 = (1/3) \cdot (3/2) \cdot P_{H_2} A / ((2/3) \cdot P_{H_1} A + (1/3) \cdot (3/2) \cdot P_{H_2} A) = (1/2) / (2/3 + 1/2) = 3/7$.

3. Формула Бернулли. Формула Бернулли предназначена в основном для решения следующих задач.

Пусть событие A происходит с вероятностью p при проведении опыта. Проведем n таких опытов в одинаковых условиях и незаписи-

мо друг от друга. Какова вероятность, что событие A произойдет в k опытах, т.е. k раз?

Обозначим через P_n^k искомую вероятность, тогда ответ даст формула Бернулли:

$$P_n^k = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k , а $q = 1 - p$.

Пример 3. Каждый пятый клиент банка приходит в банк брать проценты с вклада. Сейчас в банке ожидают своей очереди обслуживания шесть человек. Найти вероятность того, что из них будут брать проценты: а) только два человека; б) хотя бы один.

Решение. Здесь A — «человек в очереди будет брать проценты», тогда $p = 1/5$, $q = 4/5$. Далее, $n = 6$. Ответ на «а» — это вероятность P_6^2 , ответ на «б» — это P_6^0 (> 0). Вычисляя ответ на «а», получим $P_6^2 = C_6^2 \cdot (1/5)^2 \cdot (4/5)^4 \approx 1/4$. Что касается «б», то искомую вероятность легче вычислить переходом к противоположному событию, т.е. как $1 - P_6^0 = 1 - (4/5)^6 \approx 3/4$.

Выведем теперь формулу Бернулли. Прежде всего будем считать серию из n опытов одним сложным опытом, который нас будет интересовать только тем, что будет происходить с событием A , в частности в каких опытах серии оно произойдет и в каких нет. Обозначим через K сложное событие — «событие A произошло в серии k раз». Нам нужно найти вероятность $P(K)$. Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ и K — его подмножество из k элементов. Предположим, что в опытах с номерами из K событие A произошло, а в остальных опытах нет. Обозначим такое сложное событие $A(K)$, а его вероятность $P(K)$. Так как опыты серии проводятся в одинаковых условиях и независимо друг от друга, то $P(K) = p^k q^{n-k}$. Заметим теперь, что если $K_1 \neq K_2$, то сложные события $A(K_1)$, $A(K_2)$ несовместны. Кроме того, ясно, что $K = \cup \{A(K) : K \subset N, |K| = k\}$. Слагаемые в этой формуле несовместны и имеют одинаковую вероятность, значит, $P(K) = L p^k q^{n-k}$, где L — число слагаемых. Но сколько слагаемых? Их число L , очевидно, есть число сочетаний из n по k , т.е. C_n^k . Отсюда искомая вероятность равна $P_n^k = C_n^k p^k q^{n-k}$.

4. Кредитный риск и способы его уменьшения. Важнейшим отделом банка является кредитный. При выдаче кредита (или ссуды) всегда есть опасение, что клиент не вернет кредит. Конечно, в цивилизованных странах возврата кредита можно потребовать через суд, но во многих ситуациях банки не идут этим путем. А ведь невозврат кредита — это прямые потери банка, которые вполне могут сказаться и на зарплате работников, а то и привести к банкротству банка. Поэтому предотвращение невозврата, уменьшение риска невозврата кредитов — это важнейшая задача кредитного отдела. Какие же существуют способы уменьшения риска невозврата кредита?

Во-первых, отдел должен постоянно систематизировать и обобщать информацию по выданным кредитам и их возвращению. Информация по выданным кредитам должна быть систематизирована по размерам выданных кредитов, должна быть построена классификация клиентов, которые взяли кредит (физические лица, государственные органы, предприятия, другие банки и т.п.).

Во-вторых, отдел (банк в целом) должен вести так называемую *кредитную историю* своих клиентов, в том числе и потенциальных (т.е. когда, где, какие кредиты брал и как их возвращал клиент). Пока у нас в стране с этим плохо — большинство клиентов не имеют своей кредитной истории. Кроме того, обычно оценивается возможность возврата клиентом кредита с помощью анализа его баланса — если это банк; планов и технического уровня производства, перспектив развития — если это предприятие, и т.п.

В-третьих, есть различные способы обеспечения кредита, например клиент отдает что-то в залог, и если не возвращает кредит, то банк становится собственником залога.

В-четвертых, в банке должна быть четкая инструкция по выдаче кредита (кому какой кредит можно выдать и на какой срок).

В-пятых, должны быть установлены четкие полномочия по выдаче кредита. Скажем, рядовой сотрудник отдела может выдать кредит не более 1000 дол., кредиты до 10 000 дол. может выдать начальник отдела, свыше 10 000 дол., но не более 100 000 дол. может выдать вице-президент по финансам, и кредиты свыше 100 000 дол. выдает только совет директоров (читайте роман А. Хейли «Менялы»).

В-шестых, для выдачи особо больших и опасных кредитов объединяются несколько банков и сообща выдают этот кредит.

В-седьмых, существуют страховые компании, которые страхуют невозврат кредита (но есть точка зрения, что невозврат кредита не подлежит страхованию — это риск самого банка).

В-восьмых, существуют внешние ограничения по выдаче кредитов (например, установленные Центральным банком); скажем, не разрешается выдавать очень крупный кредит одному клиенту, и т.д.

Пример 4. Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% — государственные органы, 30% — другие банки, остальные — физические лица. Вероятности невозврата взятого кредита соответственно таковы: 0,01; 0,05 и 0,2. Найти вероятность невозврата очередного запроса на кредит. Начальнику кредитного отдела доложили, что получено сообщение о невозврате кредита, но в факсопом сообщении имя клиента было плохо пропечатано. Какова вероятность, что данный кредит не возвращает какой-то банк?

Решение. Вероятность невозврата найдем по формуле полной вероятности. Пусть H_1 означает, что запрос поступил от государственного органа, H_2 — от банка, H_3 — от физического лица и событие A — невозврат рассматриваемого кредита. Тогда $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}A + P(H_2) \cdot P_{H_2}A + P(H_3) \cdot P_{H_3}A = 0,1 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,136$.

Вторую вероятность найдем по формуле Байеса: $P_A H_2 = P(H_2) \times P_{H_2} A / P(A) = 0,015 / 0,136 = 15 / 136 \approx 1/9$.

Как в реальности определяют все приведенные в этом примере данные, например условные вероятности $P_{H_i} A$? По частоте невозврата кредита для соответствующей группы клиентов. Пусть физические лица взяли всего 1000 кредитов и 200 не вернули. Значит, соответствующая вероятность $P_{H_2} A$ оценивается как 0,2. Соответствующие данные — 1000 и 200 — берутся из базы данных (БД) банка.

Как правило, по частоте соответствующих событий оценивают и другие вероятности. Например, банк регулярно участвует в кредитовании перспективных проектов. Однако иногда проекты получаются не очень прибыльными. Чтобы получить правильные оценки, нужно расклассифицировать проекты по группам, объединяющим более или менее одинаковые, родственные проекты, оценить частоту неприбыльных проектов по каждой группе, а затем с помощью специальных методов (например, использования формулы полной вероятности) найти усредненную оценку по совокупности всех проектов.

Методы обработки данных для получения статистических закономерностей (например, оценки тех или иных вероятностей) принадлежат уже к математической статистике. Теория вероятностей и математическая статистика сильно связаны друг с другом. В нашем курсе мы изучаем их параллельно.

ЗАДАЧИ

1. Банк имеет шесть отделений. С вероятностью 0,2 независимо от других каждое отделение может заказать на завтра крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Какова вероятность того, что будет: а) ровно две заявки; б) хотя бы одна. Какова вероятность того, что есть заявка от первого отделения, если поступило две заявки.

Решение. Эту задачу надо решать с помощью формулы Бернулли. Остановимся только на нахождении последней вероятности. Это условная вероятность $P_A B$, где A = «поступило две заявки», а B = «поступила заявка от первого отделения». По формуле для условной вероятности (см. п. 3, раздел 15.2) имеем: $P_A B = P(A \cap B) / P(A) = 0,2 \cdot C_5^1 (0,2)^1 (0,8)^4 / (C_5^2 (0,2)^2 (0,8)^4) = 1/3$.

2. В партии арбузов 80% опелых, остальные недоспелые. Наугад отобраны четыре арбуза. Найдите вероятность того, что среди них: а) не менее трех спелых; б) не все спелые.

3. В специализированную больницу поступают в среднем 70% больных с заболеванием K , остальные — с заболеванием M . Вероят-

ность полного излечения болезни K равна 0,8, болезни M — 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Какова вероятность того, что он болел болезнью K ?

Тема 16.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

16.1. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. Дискретные случайные величины. *Случайной величиной* (с.в.) называется величина, которая при проведении опыта принимает числовое значение, заранее неизвестно какое. Те значения, которые с.в. может принять, образуют множество ее возможных значений. Таким образом, хотя конкретное значение с.в. не предугадаешь, оно будет из множества возможных значений, и это множество может быть хорошо известно.

Пример 1. Пусть Y — число выпавших очков при бросании игрального кубика. Тогда Y — с.в. и множество ее возможных значений есть $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

С.в. X называется *дискретной* (д.с.в.), если множество ее возможных значений счетно, т.е. все возможные значения можно занумеровать натуральными числами $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Например, с.в. Y из примера 1 является дискретной.

Д.с.в. полностью задается своим рядом распределения. *Ряд распределения* — это таблица из двух строк: в верхней перечисляются все возможные значения д.с.в., а под ними в нижней строке проставлены вероятности, с которыми д.с.в. эти значения принимают.

Пример 2. С.в. Y из примера 1 имеет следующий ряд распределения:

1	2	3	4	5	6
$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

В общем виде д.с.в. X имеет ряд распределения $\left\{ \begin{matrix} x_1 \\ p_1 \end{matrix} \right\} \dots \left\{ \begin{matrix} x_i \\ p_i \end{matrix} \right\} \dots$, где $p_i = P(X = x_i)$.

Ряд распределения содержит исчерпывающую информацию о с.в. Покажем, как находить различные вероятности, зная ряд распределения.

Обозначим через W множество возможных значений X . Заметим, что если a, b — различные значения X , то события $X = a$ и $X = b$ несовместны. Далее, так как X — д.с.в., то W — счетное множество. Пусть V — какое-нибудь подмножество множества W , тогда $(X \in V) = \cup \{X = f : f \in V\}$. Так как события $X = f, f \in V$ — попарно несовместны, то, используя свойство счетной аддитивности вероятности (см. п. 2, раздел 15.2), получим: $P(X \in V) = \sum_{f \in V} P(X = f)$.

Пример 3. Рассмотрим опыт с бросанием сразу двух игральных кубиков. Пусть Z — сумма выпавших очков. Тогда Z — д.с.в. с рядом распределения

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Найдем вероятности $P(Z < 5)$, $P(Z > 10)$, $P(3 < Z < 7)$. Имеем $P(Z < 5) = P(Z = 2) + P(Z = 3) + P(Z = 4) = 1/36 + 2/36 + 3/36 = 1/6$; $P(Z > 10) = P(Z = 11) + P(Z = 12) = 2/36 + 1/36 = 1/12$; $P(3 < Z < 7) = P(Z = 4) + P(Z = 5) + P(Z = 6) = 1/3$.

Отметим, что сумма всех вероятностей в ряду распределения равна единице. Действительно, так как всегда при проведении опыта с.в. X принимает какое-то значение из W , то событие $(X \in W)$ достоверно, значит, $P(X \in W) = 1$. Но $P(X \in W) = \sum_{f \in W} P(X = f)$, эта сумма и есть сумма всех вероятностей в ряду распределения.

Д.с.в. можно определить как такую, которая каждое свое возможное значение принимает с ненулевой вероятностью. При изучении д.с.в. игнорируются ее возможные значения, которые она принимает с нулевой вероятностью. В разделе 16.3 познакомимся с принципиально другими с.в. — непрерывными. Такие с.в. каждое свое возможное значение принимают с нулевой вероятностью.

2. Математическое ожидание и его свойства. Ряд распределения полностью описывает д.с.в. Но весьма часто требуется знать о с.в. лишь некоторые ее характеристики в целом. Из таких характеристик наибольшее значение имеют математическое ожидание и дисперсия.

Пусть X — д.с.в. с рядом распределения $\begin{vmatrix} x_1 \\ p_1 \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} x_l \\ p_l \end{vmatrix} \dots$ и множеством возможных значений W .

Математическим ожиданием X называется сумма ряда $\sum_{x_i \in W} x_i p_i$ (при условии абсолютной сходимости этого ряда). Математическое ожидание обозначается $M[X]$ или m_x .

Пример 4. Найдем математическое ожидание с.в. Z — суммы выпавших очков при бросании сразу двух игральных кубиков (см. пример 3). Имеем $M[Z] = 2 \cdot (1/36) + 3 \cdot (2/36) + 4 \cdot (3/36) + 5 \cdot (4/36) + \dots + 12 \cdot (1/36) = 7$.

Роль математического ожидания выявляет следующая теорема.

Теорема. *Среднее арифметическое значений, принятых с.в. в длинной серии опытов, примерно равно ее математическому ожиданию.*

Это — качественно первая, но приблизительная формулировка связи среднего арифметического, с одной стороны, и математического ожидания — с другой. В точности эта связь будет сформулирована позднее (см. теорему Чебышева в п. 2 раздела 17.1). Поясним теорему, считая, что с.в. X имеет конечное множество возможных значений $x_1, \dots, x_m$.

Проведем n опытов и пусть в этих опытах X приняла значения $a_1, \dots, a_n$, тогда среднее арифметическое этих значений равно $S = (a_1 + \dots + a_n)/n$. Сгруппируем эти значения — пусть X приняла l_1 раз значение x_1 , l_2 — x_2 и т.д., тогда $S = (x_1 l_1 + \dots + x_m l_m)/n = x_1 l_1/n + \dots + x_m l_m/n$. Но каждая дробь l_i/n есть частота принятия в серии опытов значения x_i , и эта частота в длинной серии опытов примерно равна соответствующей вероятности p_i . Таким образом, получаем $S \approx x_1 p_1 + \dots + x_m p_m = M[X]$.

Свойства математического ожидания.

1) Математическое ожидание постоянной величины равно ей самой.

Ряд распределения постоянной C таков: $\begin{vmatrix} C \\ 1 \end{vmatrix}$. Следовательно, $M[C] = C \cdot 1 = C$.

2) Математическое ожидание суммы двух с.в. равно сумме их математических ожиданий.

Доказательство. Не будем указывать область суммирования, когда ясно, какова она. Пусть X, Y — две д.с.в., тогда $P[X + Y] = \sum_c P(X + Y = c) = \sum_{a,b} (a + b)P(X = a, Y = b)$.

Если в этой двойной сумме сгруппировать слагаемые по-другому, то получим продолжение: $\sum_{a,b} (a + b)P(X = a, Y = b) = \sum_{a,b} a P(X = a, Y = b) + \sum_{a,b} b P(X = a, Y = b) = \sum_a \sum_b a P(X = a, Y = b) + \dots = \sum_a a \sum_b P(X = a, Y = b) + \dots$. Но $\sum_b P(X = a, Y = b) = P(X = a)$ (аналогично — со второй суммой). Получим продолжение: $\sum_a a P(X = a) + \sum_b b P(Y = b) = M[X] + M[Y]$.

3) При добавлении к с.в. константы ее математическое ожидание увеличивается на эту константу.

Это — следствие более общего свойства (см. свойство 2).

4) Математическое ожидание суммы конечного числа с.в. равно сумме их математических ожиданий.

Выводится по индукции из свойства 2.

5) При умножении с.в. на константу ее математическое ожидание увеличивается во столько же раз.

$$\text{Имеем: } M[kX] = \sum_a k a P(X=a) = k \sum_a a P(X=a) = kM[X].$$

6) Если $A \leq X \leq B$, то $A \leq M[X] \leq B$.

Имеем: $M[X] = \sum_a a P(X=a)$, и поскольку все вероятности неотрицательны, то $M[X] \leq B \sum_a P(X=a) = B \cdot 1 = B$. Аналогично $M[X] \geq A$.

7) Если с.в. X, Y независимы, то $M[XY] = m_x m_y$.

При этом с.в. X, Y называются *независимыми*, если $P(X=a, Y=b) = P(X=a) \cdot P(Y=b)$ для любых чисел a, b .

Доказательство. $M[XY] = \sum_c c P(XY=c) = \sum_{a,b} ab P(X=a, Y=b)$. Но для независимых с.в. X, Y $P(X=a, Y=b) = P(X=a) \cdot P(Y=b)$ и, продолжая, получим:

$$\sum_{a,b} ab P(X=a) P(Y=b) = (\sum_a a P(X=a)) (\sum_b b P(Y=b)) = M[X] M[Y].$$

3. Дисперсия и ее свойства. *Дисперсия* с.в. X обозначается $D[X]$ и есть $M[(X - m_x)^2]$.

Содержательный смысл дисперсии — мера рассеяния значений с.в. вокруг ее математического ожидания. Пусть пристреливаются несколько различных пистолетов, тогда дисперсия случайной точки попадания в мишень может оцениваться как характеристика оружия, называемая *кучностью*.

Пример 5. Пусть с.в. K принимает всего два значения (0 или 1) с вероятностями соответственно q, p , где $p + q = 1$. Найдем ее дисперсию.

Имеем: $M[K] = p$. Далее, $D[K] = (0 - p)^2 q + (1 - p)^2 p = p^2 q + q^2 p = pq$.

Для вычисления дисперсии часто также используют другую формулу, именно $D[X] = M[X^2] - m_x^2$. Выведем эту формулу. Имеем, по определению, $D[X] = M[(X - m_x)^2] = M[X^2 - 2Xm_x + m_x^2]$. По свойствам математического ожидания имеем далее: $M[X^2] - 2m_x M[X] + m_x^2 = M[X^2] - m_x^2$, что и требовалось доказать.

Свойства дисперсии.

1) Дисперсия постоянной величины равна нулю.

Так как $M[C] = C$ и $M[C^2] = C^2$, то $D[C] = M[C^2] - (M[C])^2 = 0$.

$$2) D[X + C] = D[X].$$

Так как $M[X + C] = M[X] + C$, то $D[X + C] = M[(X + C) - M[X + C]]^2 = M[(X + C - m_x - C)^2] = M[(X - m_x)^2] = D[X]$.

Столь же простые доказательства свойств 3—5 опустим.

$$3) D[kX] = k^2 D[X].$$

$$4) D[X] \geq 0.$$

$$5) \text{ Если } X \leq B, \text{ то } D[X] \leq B^2.$$

6) $D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{XY}$, где $K_{XY} = M[(X - m_x)(Y - m_y)]$ и называется *корреляционным моментом* случайных величин X, Y .

Действительно, $D[X + Y] = M[(X + Y) - M[X + Y]]^2 = M[(X + Y) - (m_x + m_y)]^2 = M[(X - m_x) + (Y - m_y)]^2 = M[(X - m_x)^2 + 2(X - m_x)(Y - m_y) + (Y - m_y)^2] = M[(X - m_x)^2] + 2M[(X - m_x)(Y - m_y)] + M[(Y - m_y)^2] = D[X] + 2K_{XY} + D[Y]$.

Корреляционный момент играет важную роль, он описывает взаимосвязь случайных величин. Ограничимся пока только следующим предположением.

Предположение. Если случайные величины X, Y независимы, то $K_{XY} = 0$.

Доказательство. $K_{XY} = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[XY - m_x Y - m_y X + m_x m_y] = M[XY] - 2m_x m_y + m_x m_y = M[XY] - m_x m_y$. Так как для независимых с.в. $M[XY] = m_x m_y$, то $K_{XY} = 0$.

Квадратный корень из дисперсии с.в. X называется *средним квадратическим отклонением* $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$. Размерность дисперсии есть квадрат размерности самой с.в., а среднее квадратическое имеет ту же размерность, что и сама с.в. Среднее квадратическое часто обозначается также σ_X .

4. Канонические законы распределения д.с.в. Таких законов рассмотрим три: биномиальный, пуассоновский и закон распределения по геометрической прогрессии.

С.в. X называется *распределенной по биномиальному закону* с параметрами $n, p > 0$, если X может принимать лишь значения $0, 1, \dots, n$ и $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$.

С.в. X можно трактовать следующим образом. Рассмотрим какое-нибудь событие A , которое происходит в опыте с вероятностью p . Проведем серию n опытов в одинаковых условиях и независимо друг от друга. Тогда событие A произойдет в серии какое-то случайное число раз. Это «число раз» и принимает X в качестве своего значения. Если опыт называть *успешным*, когда происходит событие A , то число успехов в серии и есть значение с.в. X . Как легко видеть, соответствующая вероятность подсчитывается по формуле Бернулли (см. п. 3, раздел 15.3).

Пример 6. Составить ряд распределения для с.в., распределенной по биномиальному закону с параметрами $n = 4$, $p = 1/3$.

Решение. Обозначим исследуемую с.в. через X . Возможные значения X есть 0, 1, 2, 3, 4 и $P(X = k) = C_4^k (1/3)^k (2/3)^{4-k}$. Результаты вычислений

сводим в таблицу. X :

0	1	2	3	4
$16/81$	$32/81$	$24/81$	$8/81$	$1/81$

.

Найдем математическое ожидание и дисперсию с.в., распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p . Для этого будем трактовать с.в. X как число опытов в серии, в которых произошло событие A — см. чуть выше. Введем для каждого $i = 1, \dots, n$ с.в. Z_i , которая принимает значение, равное единице, если событие A произошло в i -м опыте, и нулю, если оно не произошло в этом опыте. Как легко убедиться, $X = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$. Следовательно, $M[X] = M[Z_1] + \dots + M[Z_n]$. Но все величины Z_i распределены одинаково и $M[Z_i] = p$ — см. пример 5. Значит, $M[X] = np$. Теперь найдем дисперсию. Заметим, что величины Z_i независимы и $D[Z_i] = pq$ (см. пример 5). Значит, $D[X] = npq$.

С.в. Y называется *распределенной по закону Пуассона* с параметром $a > 0$, если Y может принимать значения 0, ..., k , ... и $P(Y = k) = e^{-a} a^k / k!$.

Найдем математическое ожидание: $M[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-a} a^k / k! = a e^{-a} \times$

$\times (\sum_{k=0}^{\infty} a^k / k!) = a e^{-a} e^a = a$, так как $\sum_{k=0}^{\infty} a^k / k! = e^a$. Дисперсию вычислить

труднее; мы опустим вычисления и приведем только результат: $D[Y] = a$. Таким образом, численно математическое ожидание и дисперсия равны параметру a , но размерность их различна (см. конец п. 3).

Пример 7. Пусть с.в. Y распределена по закону Пуассона с параметром $a = 2$. Найти вероятности $P(Y = 1)$, $P(Y > 0)$.

Решение. $P(Y = 1) = e^{-2} 2^1 / 1! = 2e^{-2} \approx 2/7$, $P(Y > 0) = 1 - P(Y = 0) = 1 - e^{-2} 2^0 / 0! = 1 - e^{-2} \approx 6/7$.

Полезно запомнить, что $e^{-1} \approx 0,37$; $e^{-2} \approx 1/7$; $e^{-3} \approx 1/20$; $e^{-4} \approx 1/50$.

Биномиальное и пуассоновское распределения связывает следующее предложение.

Предложение. Пуассоновское распределение является предельным для биномиального. Точнее, пусть с.в. X распределена по биномиальному закону с параметрами n , p и n велико, p мало, тогда $P(X = k) \approx e^{-a} a^k / k!$ для небольших k , где $a = np$, т.е. биномиальное распределение приближенно заменяется пуассоновским.

Доказательство. Оценим $P(X = k)$. По формуле Бернулли имеем: $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (n(n-1) \dots (n-k+1) p^k / k!) (1-p)^{n-k} \approx$

$\approx ((np)^k/k!)(1-p)^{n-k}$. Теперь заметим, что $(1-p)^{n-k} = ((1-np/n)^n)^k \times (1-p)^{-k} \approx (1-np/n)^n \approx e^{-np}$. В итоге получим, что оцениваемая вероятность равна примерно $e^{-a} a^k/k!$.

Конечно, из формулировки неясно, какие n и p считать подходящими, чтобы замена биномиального распределения пуассоновским дала приближение нужной точности. Обычно такую замену осуществляют при весьма больших n , очень маленьких p и небольших k (до 10).

Пример 8. Стрелковый полк (около 1000 человек) был застигнут вражеским истребителем на марше в чистом поле. Примерно половина солдат успела выстрелить по истребителю. Какова вероятность сбить самолет?

Решение. В условии не хватает вероятности сбить самолет одиночным выстрелом из винтовки. Сделать это очень трудно — ведь надо попасть либо в пилота (но он сидит на бронированном сиденье!), либо в какое-нибудь уязвимое место самолета (бензобак, мотор и т.п.). Примем, что такая вероятность равна 0,002. Число «смертельных» для самолета пуль X распределено по биномиальному закону с $n = 500$ и $p = 0,002$, и надо найти $P(X > 0)$. Найдем дополнительную вероятность — что самолет не будет сбит, т.е. $P(X = 0)$. Заменим биномиальное распределение пуассоновским с параметром $a = np = 1$. Итак, $P(X = 0) = e^{-1} 1^0/0! = e^{-1} \approx 0,37$. Значит, искомая вероятность примерно равна 0,63.

С.в. Z называется распределенной по закону геометрической прогрессии с параметром $p > 0$, если Z может принимать значения 1, ..., k , ... и $P(Z = k) = q^{k-1}p$, где $q = 1 - p$.

С.в. Z можно трактовать следующим образом. Рассмотрим какое-нибудь событие A , которое происходит в опыте с вероятностью p . Проведем серию опытов в одинаковых условиях и независимо друг от друга до тех пор, пока не случится событие A , т.е. когда опыт закончится успешно. Это число опытов, включая последний — «успешный», и принимает Z в качестве своего значения.

Пример 9. В автоматамагазине покупатели выбирают автомобили. Как правило, несколько первых отвергаются до тех пор, пока покупатель не найдет подходящий автомобиль. Возникает случайная величина Z — число отвергнутых автомобилей. Найти ее ряд распределения.

Решение. В условии не хватает вероятности того, что покупателю понравится произвольный автомобиль. Пусть эта вероятность равна 1/5. Тогда

ряд распределения Z есть $\frac{1}{1/5} \mid \frac{2}{(4/5) \cdot (1/5)} \mid \dots \mid \frac{k}{(4/5)^{k-1} \cdot (1/5)} \mid \dots$.

Найдем математическое ожидание с.в., распределенной по закону геометрической прогрессии с параметром $p > 0$. Имеем: $M[Z] =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right)' = p (q/(1-q))' = p(1/(1-q)^2) = \\ &= p/p^2 = 1/p. \end{aligned}$$

(Поверим математикам, что операция дифференцирования суммы бесконечного числа слагаемых здесь правомерна!) Примерно так же находится дисперсия: $D[Z] = q/p^2$.

ЗАДАЧИ

1. Компания рассматривает проект строительства четырех домов в разных местах. Средства для строительства дают сами будущие жильцы. Вероятность набрать необходимые средства для постройки дома оценивается в 0,8 (собственно, речь идет об агитации будущих жильцов). Каждый построенный дом окупает $1/3$ всех затрат компании по проекту. Найти распределение прибыли компании (через сумму затрат), найти ожидаемую прибыль.

Решение. Обозначим все затраты через a . Пусть X — число домов, которые компании удастся построить. Тогда X распределено по биномиальному закону с параметрами $n = 4$, $p = 0,8$. Прибыль S зависит от X по формуле $S = -a + (a/3)X$. Составим теперь ряд рас-

пределения X :

0	1	2	3	4
$1/625$	$16/625$	$96/625$	$256/625$	$256/625$

. Отсюда и получаем ряд

распределения S :

$-a$	$-2a/3$	$-a/3$	0	$a/3$
$1/625$	$16/625$	$96/625$	$256/625$	$256/625$

.

Ожидаемая прибыль — это математическое ожидание с.в. S . Находим ее по формуле $M[S] = \sum_i s_i p_i = a/15$. Кстати, $M[S]$ можно вычислить и так: $M[S] = \sum_i (-a + (a/3)x_i) p_i = -a \sum_i p_i + (a/3) \sum_i x_i p_i = -a + (a/3)M[X] = -a + (a/3)np = -a + (a/3)4 \cdot 0,8 = a/15$.

2. Убедитесь в том, что во всех трех законах — биномиальном, пуассоновском и по геометрической прогрессии — сумма вероятностей в рядах распределения равна единице.

3. Среди 100-долларовых купюр 1% фальшивых, сделанных, однако, довольно искусно, так что работница обменного пункта десятую часть их принимает за настоящие. В день принимается примерно 200 100-долларовых купюр. Какова вероятность того, что среди них есть хотя бы одна фальшивая? За сколько дней работы оправдает себя определитель фальшивых купюр, стоящий 90 дол. (он определяет все фальшивые купюры).

4. С.в. Y называется *целочисленной*, если ее возможные значения есть целые числа. Сопоставим такой с.в. функцию $\varphi(z) = \sum_k p_k z^k$ ($p_k = P(V = k)$). Такая функция называется *производящей*. Докажите, что $M[Y] = \varphi'(1)$, $D[Y] = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2$. Найдите производящие функции для с.в., распределенных по биномиальному, пуассоновскому законам и закону геометрической прогрессии. Проверьте приве-

денные выше математические ожидания и дисперсии, вычислив их с помощью производящих функций.

16.2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1. Матрицы последствий и рисков. Руководитель, менеджер, обязан разрешать проблемы, встающие перед ним, перед коллективом, которым он руководит. Он обязан принимать решения. В теории принятия решений есть специальный термин: ЛПР — лицо, принимающее решения. В этом разделе будем использовать этот термин.

Принять решение — это решить некоторую экстремальную задачу, т.е. найти экстремум некоторой функции, которую называют *целевой*, при некоторых ограничениях. Например, линейное программирование, которое было рассмотрено в разделе 3.1, представляет целый класс таких экстремальных задач. Методы теории вероятностей и математической статистики помогают принимать решения в условиях неопределенности.

Не все случайное можно «измерить» вероятностью. Неопределенность — более широкое понятие. Неопределенность того, какой цифрой вверх ляжет игральный кубик, отличается от неопределенности того, каково будет состояние российской экономики через 15 лет. Кратко говоря, уникальные единичные случайные явления связаны с неопределенностью, массовые случайные явления обязательно допускают некоторые закономерности вероятностного характера.

Предположим, что ЛПР рассматривает несколько возможных решений $i = 1, \dots, m$. Ситуация неопределенна, понятно лишь, что наличествует какой-то из вариантов $j = 1, \dots, n$. Если будет принято i -е решение, а ситуация есть j -я, то фирма, возглавляемая ЛПР, получит доход q_{ij} . Матрица $Q = (q_{ij})$ называется *матрицей последствий (возможных решений)*. Какое же решение нужно принять ЛПР? В этой ситуации полной неопределенности могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера. Они не обязательно будут приняты ЛПР. Многое будет зависеть, например, от его склонности к риску. Но как оценить риск в данной схеме?

Допустим, мы хотим оценить риск, который несет i -е решение. Нам неизвестна реальная ситуация. Но если бы ее знали, то выбрали бы наилучшее решение, т.е. приносящее наибольший доход. Иначе говоря, если ситуация есть j -я, то было бы принято решение, дающее доход $q_j = \max_i q_{ij}$. Значит, принимая i -е решение, мы рискуем получить не q_i , а только q_{ij} , значит, принятие i -го решения несет риск недобрать $r_{ij} = q_j - q_{ij}$. Матрица $R = (r_{ij})$ называется *матрицей рисков*.

Пример 1. Пусть матрица последствий есть $Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$. Составим матрицу рисков. Имеем $q_1 = \max_j q_{1j} = 8$, $q_2 = 5$, $q_3 = 8$, $q_4 = 12$. Следовательно, матрица рисков есть $R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Заметим для дальнейшего, что здесь мы в первый раз встретились с количественной оценкой риска. Несомненно, что риск — одна из важнейших категорий предпринимательской деятельности, неотъемлемая черта этой деятельности. Как известно, предприниматели живут в среднем лучше, чем остальная часть человечества. Это награда им за риск в один несчастный день оказаться разоренными. Риск — понятие многогранное, и мы еще не раз встретимся с ним далее.

2. Принятие решений в условиях полной неопределенности. Некоторым ориентиром могут служить следующие правила-рекомендации.

Правило Вальда (правило крайнего пессимизма). Рассматривая i -е решение, будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход $a_i = \min_j q_{ij}$. Но теперь уж выберем решение i_0 с наибольшим a_{i_0} . Итак, правило Вальда рекомендует принять решение i_0 , такое что $a_{i_0} = \max_i a_i = \max_i (\min_j q_{ij})$. Так, в вышеуказанном примере имеем: $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 1$. Теперь из чисел 2, 2, 3, 1 находим максимальное. Это — 3. Значит, правило Вальда рекомендует принять 3-е решение.

Правило Сэвиджа (правило минимального риска). При применении этого правила анализируется матрица рисков $R = (r_{ij})$. Рассматривая i -е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимального риска $b_i = \max_j r_{ij}$. Но теперь уж выберем решение i_0 с наименьшим b_{i_0} . Итак, правило Сэвиджа рекомендует принять решение i_0 такое, что $b_{i_0} = \min_i b_i = \min_i (\max_j r_{ij})$.

Так, в вышеуказанном примере имеем: $b_1 = 8$, $b_2 = 6$, $b_3 = 5$, $b_4 = 7$. Теперь из чисел 8, 6, 5, 7 находим минимальное. Это 5. Значит, правило Вальда рекомендует принять 3-е решение.

Правило Гурвица (взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации). Принимается решение i , на котором достигается максимум $\{\lambda \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \max_j a_{ij}\}$, где $0 \leq \lambda \leq 1$.

Значение λ выбирается из субъективных соображений. Если λ приближается к единице, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда, при приближении λ к нулю правило Гурвица приближается к правилу «розового оптимизма» (догадайтесь сами, что это значит). В вышеуказанном примере при $\lambda = 1/2$ правило Гурвица рекомендует 2-е решение.

3. Принятие решений в условиях частичной неопределенности. Предположим, что в рассматриваемой схеме известны вероятности p_j того, что реальная ситуация развивается по варианту j . Именно такое положение называется *частичной неопределенностью*. Как здесь принимать решение? Можно выбрать одно из следующих правил.

Правило максимизации среднего ожидаемого дохода. Доход, получаемый фирмой при реализации i -го решения, является случайной величиной Q_i с рядом распределения $\left| \frac{q_{i1}}{p_1} \right| \dots \left| \frac{q_{in}}{p_n} \right|$.

Математическое ожидание $M[Q_i]$ и есть средний ожидаемый доход, обозначаемый также $\bar{Q}_i$. Итак, правило рекомендует принять решение, приносящее максимальный средний ожидаемый доход.

Предположим, что в схеме из предыдущего пункта вероятности такие: (1/2, 1/6, 1/6, 1/6). Тогда $\bar{Q}_1 = 29/6$, $\bar{Q}_2 = 25/6$, $\bar{Q}_3 = 7$, $\bar{Q}_4 = 17/6$. Максимальный средний ожидаемый доход равен 7, соответствует 3-му решению.

Правило минимизации среднего ожидаемого риска. Риск фирмы при реализации i -го решения является случайной величиной R_i с рядом распределения $\left| \frac{r_{i1}}{p_1} \right| \dots \left| \frac{r_{in}}{p_n} \right|$. Математическое ожи-

дание $M[R_i]$ и есть средний ожидаемый риск, обозначаемый также $\bar{R}_i$. Правило рекомендует принять решение, влекущее минимальный средний ожидаемый риск.

Вычислим средние ожидаемые риски при указанных выше вероятностях. Получаем $\bar{R}_1 = 20/6$, $\bar{R}_2 = 4$, $\bar{R}_3 = 7/6$, $\bar{R}_4 = 32/6$. Мини-

мальный средний ожидаемый риск равен $7/6$, соответствует 3-му решению.

Иногда в условиях полной неопределенности применяют следующее правило.

Правило Лапласа равновозможности, когда все вероятности p считают равными. После этого можно выбрать какое-нибудь из двух приведенных выше правил-рекомендаций принятия решений.

4. Риск как среднее квадратическое отклонение. Еще одно понимание риска. Рассмотрим какую-нибудь операцию, доход которой есть с.в. Q . Как уже указывалось, средний ожидаемый доход — это математическое ожидание с.в. Q . А вот среднее квадратическое отклонение $\sigma_Q = \sqrt{D[Q]}$ — это мера разбросанности возможных значений дохода вокруг среднего ожидаемого дохода, что вполне можно считать мерой риска. Напомним, что $D[Q] = M[(Q - m_Q)^2]$.

Найдем риски (в их новом определении) r_i доходов Q_i в примере 1 с вероятностями из п. 3.

Ряды распределения, средние ожидаемые доходы и новые риски:

$$Q_1: \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 2 & 8 & 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ \hline \end{array}, \quad \bar{Q}_1 = 29/6 \approx 4,81, \quad r_1 \approx 1,77.$$

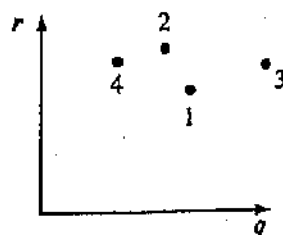
$$Q_2: \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 & 12 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ \hline \end{array}, \quad \bar{Q}_2 = 25/6 \approx 4,16, \quad r_2 \approx 3,57.$$

$$Q_3: \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 8 & 5 & 3 & 10 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ \hline \end{array}, \quad \bar{Q}_3 = 7, \quad r_3 \approx 2,30.$$

$$Q_4: \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 2 & 8 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ \hline \end{array}, \quad \bar{Q}_4 = 17/6 \approx 2,81, \quad r_4 \approx 2,54.$$

Нанесем средние ожидаемые доходы и риски на плоскость — доход $\bar{Q} = q$ откладываем по горизонтали, а риски — по вертикали (см. рисунок).

Получили четыре точки. Чем правее точка (q, r) , тем более доходная операция, чем точка выше — тем более она рискованная. Значит, нужно выбирать точку правее и ниже. Точка (q', r') доминирует точку (q, r) , если $q' \geq q$ и $r' \leq r$. В нашем случае 1-я операция доминирует 2-ю, 3-я доминирует 2-ю и 3-я доминирует 4-ю. Но 1-я и 3-я операции несравнимы — доходность 3-й больше, но и риск ее тоже больше.



Точка, не доминируемая никакой другой, называется *оптимальной по Парето*, а множество всех таких точек называется *множеством оптимальности по Парето*. Легко видеть, что если из рассмотренных операций надо выбрать лучшую, то ее обязательно надо выбрать из операций, оптимальных по Парето.

Для нахождения лучшей операции иногда применяют подходящую взвешивающую формулу, которая для пар (q, r) дает одно число, по которому и определяют лучшую операцию (см. далее задачу 3).

5. Байесовский подход к принятию решений. Рассмотрим пример.

Пример 2. Экспериментатор показал два совершенно одинаковых на вид мешочка и сказал, что в одном 80% белых фасолин и 20% коричневых (назовем этот мешочек белым), а в другом — 80% коричневых фасолин и 20% белых (этот назовем коричневым). Затем он унес оба мешочка, потом вернулся с одним и предложил угадать, какой это мешочек. Если угадаете, получите 10 дол., не угадаете — ничего не получите. Разумеется, надо участвовать в этой игре. Легко видеть, что ваш выигрыш Y случаен и ряд распре-

деления таков: $\begin{array}{c|c} 10 & 0 \\ \hline 1/2 & 1/2 \end{array}$. При этом средний выигрыш в расчете на одну игру

равен $M[Y] = (10 \cdot 1/2 + 0) \text{ дол.} = 5 \text{ дол.}$ Через некоторое время экспериментатор усложнил игру. Он предложил вам вытащить одну фасолину, увидеть ее цвет и после этого сказать, какой мешочек. Но за это он попросил уплатить предварительно 1 дол. Будете ли вы платить?

Попробуем просчитать, надо ли платить. Теперь мы уже не будем угадывать, какой мешочек перед нами, а скажем, что перед нами мешочек цвета вытащенной фасолины (это называется «решающее правило»). Какова вероятность угадывания? Ясно, что эта вероятность равна вероятности вытащить из мешочка фасолину того же цвета. Но последняя вероятность равна, очевидно, 0,8. Она стала больше! Теперь средний ожидаемый выигрыш стал 8 дол. Вывод — платить 1 дол. стоит.

В этом примере — суть байесовского подхода к принятию решений.

Предположим, предприниматель раздумывает над выбросом на рынок нового перспективного товара. Но он не знает, «пойдет» ли товар. Для уточнения ситуации он производит пробную партию и смотрит, как она раскупается. После этого ситуация становится более определенной, более прогнозируемой. Для уточнения этой ситуации можно выпустить еще одну пробную партию и проанализировать какие-нибудь другие моменты.

В обыденной жизни мы очень часто прибегаем к таким приемам. Например, собираясь в лес на прогулку, слушаем прогноз погоды или просто выглядываем в окно.

В общем, байесовский подход выглядит следующим образом. Предположим, мы имеем вероятностный прогноз ситуации S :

$P(S = H) = p$. Имея такой прогноз, можно найти средний ожидаемый доход $\bar{Q}$ или средний ожидаемый риск $\bar{R}$ и т.д. Рассмотрим возможность проведения пробной операции, которая уточнит распределение вероятностей $\{p_i\}$. Новое распределение вероятностей есть $\{p'_i\}$. Новому распределению вероятностей соответствуют новые характеристики: средний ожидаемый доход $\bar{Q}'$, средний ожидаемый риск $\bar{R}'$ и т.д. Если ЛПР решит, что при таком уточнении пробная операция оправдывается (например, если увеличение среднего ожидаемого дохода превышает затраты на проведение пробной операции), то он ее проводит. Новое распределение вероятностей $\{p'_i\}$ обычно находят по формулам Байеса.

ЗАДАЧИ

1. Страхование результатов финансовых операций. Банк выдал кредит 10 млн на год под залог жилого дома под 8% годовых (сам дом был оценен именно в 10 млн). Для уменьшения риска банк приобрел страховой полис на A руб. на этот дом, заплатив 3% от страховой суммы. В страховой компании вероятность сгореть дому такого типа за год оценивают в 0,01 (в этом случае заемщик не вернет банку ничего). Составить ряды распределения дохода банка I для $A = 5; 10; 20$ млн и найти средние доходы банка.

Решение. Ясно, что $I = -0,03A + S$, где с.в. S имеет следующий ряд распределения:

Не сгорит	Дом сгорит
800 000	$A - 10\,000\,000$
0,99	0,01

Следовательно, средний ожидаемый доход $M[I] = -0,03A + M[S] = -0,02A + 692\,000$.

2. Рассмотрите матрицу последствий $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Составьте матри-

цу рисков. Какие решения рекомендуют правила Вальда, Сэвиджа, Гурвица при $\lambda = 1/4$? Пусть распределение вероятностей состояний есть $(1/4, 1/4, 1/2)$. Найдите решение, максимизирующее средний ожидаемый доход, минимизирующее средний ожидаемый риск. Пробная операция сместила распределение вероятностей. Теперь оно $(1/8, 1/8, 3/4)$. При какой стоимости пробной операции ее проведение целесообразно (в качестве критерия взять средний ожидаемый доход)?

3. Рассмотрите три различных операции со случайным доходом.

$$Q_1: \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -5 & 0 & 5 & 10 \\ \hline 0,1 & 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ \hline \end{array}$$

$$Q_2: \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -5 & 0 & 5 & 10 \\ \hline 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ \hline \end{array}$$

$$Q_3: \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -5 & 0 & 5 & 10 \\ \hline 0,3 & 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ \hline \end{array}$$

Вычислите для всех операций ожидаемый доход $\bar{Q}$, среднее квадратическое отклонение r . Нанесите эти характеристики на единый рисунок, получив графическое изображение операций. С помощью взвешивающей формулы $E(\bar{Q}, r) = 10\bar{Q} - r$ найдите лучшую и худшую операции.

16.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. Определение непрерывной случайной величины. Для дискретной с.в. V множество возможных значений счетно, благодаря чему можно описать такую с.в. рядом распределения, т.е. набором вероятностей $\{P(V=x)\}$, где x пробегает множество возможных значений.

Однако существуют (хотя бы в теоретическом плане) с.в., у которых множество значений не является счетным, более того, заполняет некоторый сплошной промежуток. Такие с.в. невозможно описать рядом распределения и приходится для их описания использовать другие способы. Вместо вероятностей $P(V=x)$ — вероятностей принятия отдельных значений — приходится использовать вероятности $P(V < x)$, где x есть произвольное число. Так возникает функция $F(x) = P(V < x)$, определенная на множестве R всех чисел, а значение этой функции в точке x есть вероятность $P(V < x)$. Функция $F(x)$ называется *функцией распределения* с.в. V . Она полностью определяет V , в частности, с ее помощью можно находить любые интересующие нас вероятности. Например, прямо по определению этой функции имеем: $P(V < b) = F(b)$. Так как события $(a \leq V)$ и $(V < a)$ взаимно дополняют, то $P(a \leq V) = 1 - P(V < a) = 1 - F(a)$. Так как $(V < b) = (V < a) \cup (a \leq V < b)$ и два последних события несовместны, то $P(a \leq V < b) = F(b) - F(a)$ и т.д.

Пример 1. Рассмотрим с.в. S , имеющую функцию распределения

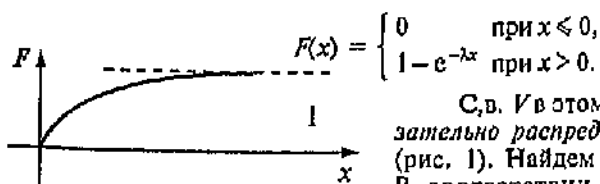


Рис. 1

С.в. V в этом случае называется *показательно распределенной* с параметром λ (рис. 1). Найдем некоторые вероятности. В соответствии с общими формулами (см. п. 1) имеем: $P(b < V) = 1 - P(V < b) = 1 - F(b) = e^{-\lambda b}$. Далее, $P(a \leq V < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

2. Свойства функции распределения. Пусть $F(x)$ — функция распределения с.в. V .

1) Функция распределения есть неубывающая функция своего аргумента, т.е. $F(a) \leq F(b)$, если $a \leq b$.

Действительно, $F(a) = P(V < a) \leq P(V < b) = F(b)$, ибо событие $(V < a)$ есть часть события $(V < b)$.

2) Функция $F(x)$ непрерывна слева в любой точке.

Докажем, например, что $F(b) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$. Пусть $\{a_n\}$ — какая-то последовательность, стремящаяся к b слева, тогда $(V < b) = \cup \{(V < a_n) : n \in N\}$. По счетной аддитивности вероятности (см. п. 2, раздел 15.2) получим $F(b) = P(V < b) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(V < a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n)$. Так как это справедливо для любой последовательности чисел $\{a_n\}$, стремящейся к b слева, то функция $F(x)$ непрерывна слева в точке b .

Примерно так же доказываются два следующих свойства.

$$3) F(-\infty) = \lim_{n \rightarrow -\infty} F(n) = 0.$$

$$4) F(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = 1.$$

Докажем важное предложение.

Предложение 1. Если функция распределения непрерывна в точке c , то $P(V = c) = 0$. Следовательно, если функция распределения непрерывна, то с.в. каждое свое отдельное значение принимает с нулевой вероятностью.

Доказательство. По непрерывности функции $F(x)$ имеем: $\lim_{x \rightarrow a+0} F(x) = F(a)$. Так как $P(V = c) \leq P(a \leq V \leq b) = F(b) - F(a)$ для любых $a \leq c$ и $b > c$, то $P(V = c) \leq \lim_{x \rightarrow a+0} F(x) - F(a) = 0$.

Пример 2. Рассмотрим с.в. V , имеющую функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ (x-a)/(b-a) & \text{при } a < x \leq b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

С.в. V называется *равномерно распределенной* на отрезке $[a, b]$ (рис. 2). Почему она так называется? Для ответа покажем, как вычислять вероятности для этой с.в.

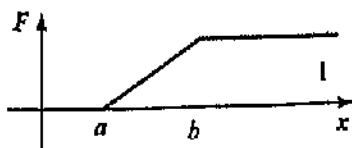


Рис. 2

Так как функция распределения $F(x)$ непрерывна, то любая вероятность $P(V = c)$ равна нулю. Значит, любые вероятности $P(c \leq V < d)$, $P(c < V \leq d)$, $P(c < V < d)$, $P(c \leq V \leq d)$ одинаковы.

Найдем $P(c < V < d)$, $c < d$. Если $d < a$ или $b < c$, то $F(a) = F(b)$, значит, $P(c < V < d) = 0$. Пусть теперь $c < a < d < b$, тогда $P(c < V < d) = F(d) - F(a) = (d - a)/(b - a)$. В итоге можно сделать следующий вывод.

Вывод. Вероятность того, что с.в. V примет значение из отрезка $[c, d]$ равна доле, которую занимает отрезок $[c, d]$ в отрезке $[a, b]$. Это правило можно также выразить по-другому — указанная вероятность пропорциональна длине отрезка пересечения $[c, d] \cap [a, b]$.

Проиллюстрируем на числовом примере. Пусть с.в. V равномерно распределена на отрезке $[0, 100]$. Найдем вероятности $P(0 < V < 60)$, $P(20 < V < 80)$, $P(-10 < V < 70)$, $P(0 < V < 120)$, $P(120 < V < 160)$, $P(V = 5)$.

Используем только что сформулированный вывод и получим: $P(0 < V < 60) = 60/100 = 6/10$, $P(20 < V < 80) = 60/100 = 6/10$, $P(-10 < V < 70) = 7/10$, $P(0 < V < 120) = 1$, $P(120 < V < 160) = 0$. Последняя вероятность, т.е. $P(V = 5)$, равна нулю.

Функция распределения существует для любой с.в. Для д.с.в. функция распределения устроена особенно просто. Ограничимся рассказом о построении графика такой функции распределения.

Пусть W — д.с.в. и $F(x)$ — ее функция распределения. Пусть $P(W = x_i) = p_i$. Легко видеть, что $F(x) = \sum_{x_j \leq x} p_j$. Отсюда видно, что при переходе через x_i функция $F(x)$ подскакивает вверх на p_i . Между же двумя соседними возможными значениями она постоянна.

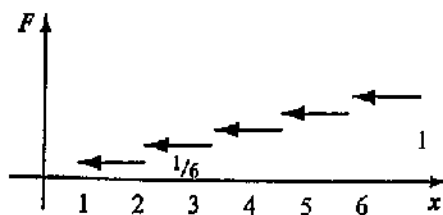


Рис. 3

Пример 3. Построим график функции распределения для случайного числа очков W , выпавших на верхней грани игрального кубика при его бросании.

С.в. W имеет следующий ряд распределения:

1	2	3	4	5	6
$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Соответствующий график функции распределения приведен на рис. 3.

3. Непрерывные случайные величины и их свойства. С.в. V называется *непрерывной*, если существует такая неотрицательная функция

$$f(x), \text{ что } P(a < V < b) = \int_a^b f(x) dx \text{ для любых } a < b.$$

Функция $f(x)$ называется *плотностью вероятности* с.в. V .

Заметим сразу же, что поскольку $P(-\infty < V < \infty) = 1$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \text{ Это свойство плотности и ее неотрицательность явля-}$$

ются характерными, т.е. неотрицательная функция, интеграл от которой по всей числовой прямой равен единице, может быть объявлена плотностью вероятности некоторой с.в.

Заметим, что интеграл имеет бесконечные пределы, т.е. он не собственный (о таких интегралах см. п. 1, раздел 11.1).

Плотность вероятности представляет удобный инструмент для нахождения различных вероятностей. Она же позволяет найти функцию распределения. В самом деле, имеем: $F(b) = P(V < b)$. Но по-

следняя вероятность, по определению, равна $\int_{-\infty}^b f(x)dx$. Итак, верно следующее предложение.

Предложение 2. Функция распределения находится интегрированием плотности: $F(b) = \int_{-\infty}^b f(x)dx$.

Из определения плотности вытекает, что она интегрируема на всей числовой прямой и потому функция распределения непрерывна также на всей числовой прямой (см. п. 5, раздел 10.2). Итак, верно следующее предложение.

Предложение 3. Функция распределения н.с.в. непрерывна всюду.

Отсюда на основании предложения 1 получаем следующее предложение.

Предложение 4. Н.с.в. каждое свое отдельное значение принимает с нулевой вероятностью.

Итак, н.с.в. каждое свое отдельное значение принимает с нулевой вероятностью. В этом их коренное отличие от д.с.в.

Отсюда вытекает, в частности, что для н.с.в. V имеем: $P(a \leq V) = P(a < v)$, $P(a < V < b) = P(a \leq V \leq b)$ и т.д. Этим будем пользоваться в дальнейшем.

Откуда взялось название «плотность вероятности»?

Рассмотрим небольшой промежуток $[x, x + \Delta x]$. Вероятность того, что V примет значение из этого промежутка, равна $P(x < V < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$. Рассмотрим отношение этой вероятности к длине промежутка, т.е. среднюю вероятность, приходящуюся на единицу длины, и устремим Δx к нулю. В пределе получим производную от функции распределения: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (F(x + \Delta x) - F(x))/\Delta x = F'(x)$.

Эта производная обязательно существует, если плотность $f(x)$ непрерывна в этой точке, более того, производная в этом случае равна $f(x)$ (см. об этом п. 5, раздел 10.2). Итак, справедливо такое предложение.

Предложение 5. В точках непрерывности плотности производная функции распределения равна плотности в этой точке.

На практике обычно плотности — это функции, непрерывные всюду, кроме конечного числа точек.

Следовательно, функция распределения и плотность связаны таким предложением.

Предложение 6. Чтобы найти плотность, надо продифференцировать функцию распределения: $f(x) = F'(x)$; чтобы найти функцию распределения, надо проинтегрировать плотность:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Пример 4. Найдем плотность с.в.: а) равномерно распределенной на отрезке $[a, b]$; б) показательной распределенной с параметром λ .

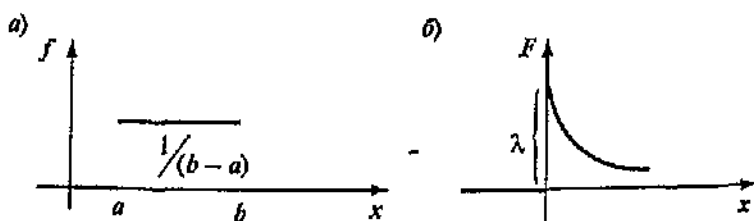


Рис. 4

Решение. Находим производную от функции распределения (см. примеры 1, 2) и получаем:

$$а) f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{при } x \in [a, b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b], \end{cases}$$

$$б) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Графики плотности приведены на рис. 4, а и 4, б соответственно.

4. Математическое ожидание и дисперсия н.с.в. Содержательный смысл математического ожидания и дисперсии для н.с.в. точно такой же, как и для д.с.в. (см. п. 2, раздел 16.1). Математическое ожидание н.с.в. V с плотностью $f(x)$ определяется формулой $M[V] =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$. Дисперсия же определяется точно так же, как и для д.с.в.,

т.е. формулой $D[V] = M[(V - m_v)^2] = M[V^2] - m_v^2$.

Пример 5. Найдём математическое ожидание и дисперсию с.в. V : а) равномерно распределённой на отрезке $[a, b]$; б) показательно распределённой с параметром λ (см. примеры 1, 2, 4).

Решение. а) $M[V] = \int_a^b x/(b-a) dx = (a+b)/2$. Теперь вычислим диспер-

сию. $M[V^2] = \int_a^b x^2/(b-a) dx = 1/(b-a) \cdot x^3/3 \Big|_a^b = (b^3 - a^3)/(3(b-a)) = (b^2 + ab + a^2)/3$, $m_v^2 = (a+b)^2/4$. Итак, $D[V] = (b-a)^2/12$.

б) $M[V] = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$. Это несобственный интеграл, значит, $\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A x \lambda e^{-\lambda x} dx$. Вычисляем интеграл $\int_0^A x \lambda e^{-\lambda x} dx$ по частям, получаем $e^{-\lambda A}(-A - 1/\lambda) + 1/\lambda$, значит, $M[V] = 1/\lambda$.

Примерно так же, но более длинно и сложно, вычисляется и дисперсия. Приведем только результат — $D[V] = 1/\lambda^2$.

5. Равномерное распределение. Систематизируем информацию об этом важнейшем типе н.с.в.

С.в. V равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, если ее плотность вероятности постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его. Ниже приведены функции плотности $f(x)$ и распределения $F(x)$ вероятности, а графики этих функций показаны на рис. 5.

$M[V] = (a+b)/2$, $D[V] = (b-a)^2/12$.

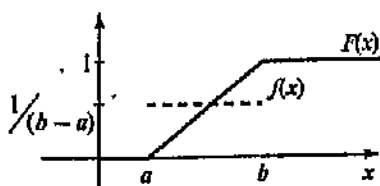


Рис. 5

Плотность вероятности: $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{при } x \in [a, b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b]. \end{cases}$

Функция распределения: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ (x-a)/(b-a) & \text{при } a < x \leq b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$

Пример 6. Цена деления шкалы прибора равна 0,5 атм. При снятии показаний оператор округляет в ближайшую сторону. Какова вероятность того, что ошибка округления превысит 0,1?

Ответ. 3/5.

Пример 7. Он и Она договорились встретиться с 12 до 13 под часами, но никто не смог уточнить момент своего прихода. Однако каждый пообещал ждать другого в течение 15 минут. Какова вероятность их встречи? Он ждет Ее уже более 10 минут. Какова вероятность того, что в оставшееся время Она еще придет?

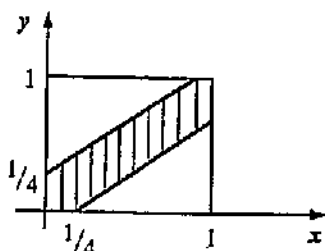


Рис. 6

Решение. Пусть x — момент его прихода, y — ее. Условие встречи $|x - y| \leq 1/4$. В единичном квадрате (рис. 6) заштриховано множество точек их встреч. Условия задачи позволяют предполагать, что момент его прихода и момент ее прихода равномерно распределены на единичных отрезках $[0, 1]$, а точка их прихода равномерно распределена в единичном квадрате. Значит, вероятность их встречи равна площади множества точек их встречи. Эта площадь равна $7/16$. Решение другого вопроса попробуйте получить самостоятельно.

Этот пример показывает, что равномерное распределение можно определить не только в одномерном случае. Выделим какую-нибудь плоскую область $\mathcal{D}$ и определим случайную величину Z следующим образом: Z принимает значения только из области $\mathcal{D}$, причем вероятность того, что Z примет значение из области $\mathcal{E}$, пропорциональна площади пересечения $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}$. Такая с.в. называется *равномерно распределенной в области $\mathcal{D}$* . Так, в предыдущем примере точка прихода обоих молодых людей равномерно распределена в единичном квадрате.

6. Показательное распределение. Систематизируем информацию об этом важнейшем типе н.с.в.

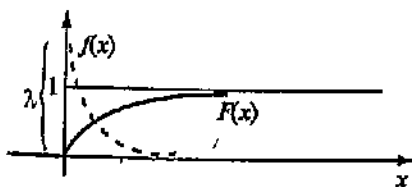


Рис. 7

С.в. V показательного распределена с параметром $\lambda > 0$, если ее функция плотности $f(x)$ и распределения $F(x)$ вероятности таковы, как представлены ниже, а графики этих функций соответствуют рис. 7. $M[V] = 1/\lambda$, $D[V] = 1/\lambda^2$.

Плотность вероятности: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$

Функция распределения: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$

Характеристическое свойство показательного распределения: $P_{(V>a)}(V > a + b) = P(V > b)$.

Доказательство. По определению условной вероятности имеем: $P_{(V>a)}(V>a+b) = (P((V>a+b) \cap (V>a)) / P(V>a))$. Но $(V>a+b) \cap (V>a) = (V>a+b)$, значит, $P((V>a+b) \cap (V>a)) = P(V>a+b)$. Учтем, что $P(V>c) = e^{-\lambda c}$. Окончательно получаем: $P(V>a+b) / P(V>a) = e^{-\lambda(a+b)} / e^{-\lambda a} = e^{-\lambda b} = P(V>b)$, что и требовалось доказать.

Пример 8. Утренняя планерка в управлении продолжается в среднем около часа. На сей раз за час она не закончилась. Какова вероятность того, что она продлится еще не меньше 15 мин?

Решение. Пусть V — случайная продолжительность планерки. Есть некоторые основания предполагать ее показательно распределенной. Возьмем час за единицу времени, тогда $\lambda = 1$ (ибо $M[V] = 1/\lambda$). По характеристическому свойству показательного распределения имеем: $P_{(V>1)}(V>1+1/4) = P(V>1/4) = e^{-1/4} = 0,8$.

Показательное распределение и простейший поток событий. Пусть Θ — последовательность событий, происходящих в случайные моменты времени. Например, мы наблюдаем звездное небо с 0 ч до 3 ч ночи и отмечаем моменты «падения звезд» — т.е. сгорания в атмосфере сравнительно крупных метеоритов. Конечно, от падения одного метеорита до падения следующего проходит случайное время. Предположим, что эти промежутки независимы друг от друга и показательно распределены с одним и тем же параметром λ (это соответствует действительности). Такой поток событий называется *простейшим*. Оказывается, что число событий такого потока, происшедших на каком-то интервале времени, распределено по закону Пуассона с параметром, равным λt , где t — длина этого промежутка (о законе Пуассона см. п. 4, раздел 16.1).

Пример 9. Станция «Скорой помощи» принимает звонки с просьбой о медицинской помощи. Звонки следуют в среднем через 5 мин. Какова вероятность того, что за полчаса будет: а) 3 звонка; б) хотя бы один звонок?

Решение. Звонящие на станцию действуют независимо друг от друга. Это и некоторые другие соображения дают основания предполагать, что поток звонков — простейший. Значит, число звонков за какой-то промежуток времени распределено по закону Пуассона: $P(Y=k) = e^{-a} a^k / k!$. В нашем примере этот промежуток есть полчаса, следовательно, a есть среднее число звонков за полчаса, т.е. $a = 6$. Теперь найдем искомые вероятности: а) $P(Y=3) = e^{-6} 6^3 / 3! \approx 1/11$; б) $P(Y>0) = 1 - P(Y=0) = 1 - e^{-6} \approx 1$.

ЗАДАЧИ

1. С.в. распределена равномерно на некотором промежутке. Найти концы этого промежутка, если ее математическое ожидание равно 5, а дисперсия равна 25/3.

Решение. Обозначим концы промежутка a, b , тогда имеем систему уравнений:
$$\begin{cases} (a+b)/2 = 5, \\ (b-a)^2/12 = 25/3. \end{cases}$$

Решая систему, получаем: $a = 0, b = 10$.

2. Манометр показывает давление в колонне, которое колеблется от 10,0 до 10,2 атм, и в этих пределах любое давление равновозможно. В манометр попал посторонний предмет, и теперь его стрелка не отклоняется больше чем на 10,16 атм. Какое давление в среднем показывает манометр?

3. Клиент беспокоит своего брокера приказами о продаже или покупке ценных бумаг. Поток таких приказов будем считать простейшим, в среднем поступает один приказ в неделю. Последний приказ поступил два дня назад. Какова вероятность, что в текущие сутки также поступит приказ?

Указание. Вспомните, что промежуток времени между двумя последовательными событиями в простейшем потоке распределен показательно; воспользуйтесь также характеристическим свойством показательного распределения.

16.4. НАЧАЛЬНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

1. Цель начальной статистической обработки информации.

Пример 1. Отдел маркетинга крупной швейной фабрики провел анкетирование 100 покупателей. В числе вопросов анкеты были и вопросы о пожеланиях покупателей мужских костюмов.

Обработка анкет дала следующие результаты распределения предпочтений:

1) по месту изготовления:	Отечественные	Импортные
	60	40

2) по стоимости в дол. США:	100	100—200	200—300	300—400	400
	17	38	37	6	2

3) по цвету:	Темные	Светлые	Нейтральные
	40	20	40

4) по наличию жилетки:	С жилеткой	Без жилетки
	28	72

Оказалось, что ассортимент производства отличался от пожеланий покупателей. Отдел маркетинга представил дирекции фабрики свои предложения по изменению ассортимента.

Пример 2. Отдел маркетинга крупного автозавода провел анкетирование владельцев автомобилей, купивших 5 лет назад новые автомобили (посредниками в анкетировании были дилеры-продавцы). В частности, от-

дел интересовало, сколько километров наездил автовладелец. После обработки было получено следующее распределение (в тыс. км и в % от числа анкетированных).

50	50—100	100—150	150—200	200—250	250—300	300
2	6	16	32	30	12	2

В дирекции автозавода эти данные сочли весьма важными — они позволили значительно уточнить ресурс мотора и многих деталей выпускаемого автомобиля.

Напомним, что *генеральная совокупность* — достаточно большая совокупность более или менее однородных объектов, некоторая характеристика которых меняется случайным образом от объекта к объекту. Как распределена эта характеристика по всей генеральной совокупности — в этом цель изучения этой совокупности. Если бы исследуемая совокупность была маленькой, то можно было бы просто описать ее элементы с указанием характеристики каждого элемента. Но генеральная совокупность слишком велика (по определению!). Даже если возможно описать каждый ее элемент (современные компьютеры вполне позволяют это сделать по крайней мере по многим генеральным совокупностям), полученная информация была бы необозримой. Человеческий мозг слабават для анализа таких объемов информации. Он требует обобщенной информации, представления информации в компактной, обозримой форме.

Цель начальной статистической обработки информации именно в этом — представить эту информацию в компактной, обозримой, понятной форме.

Так, в примерах 1, 2 информация из анкет была подвергнута начальной обработке и в итоге представлена в компактной, обозримой форме. В свою очередь, как полагал в обоих примерах отдел маркетинга, массив анкет адекватно отражал генеральную совокупность. Интересно отметить, что в примере 2 генеральная совокупность — вполне реальная, достаточно четко очерченная совокупность. В примере 1 генеральная совокупность — это совокупность всех потенциальных покупателей продукции швейной фабрики, которая не является четко очерченной совокупностью.

2. Генеральная совокупность и выборки из нее. Исследовать все элементы генеральной совокупности нецелесообразно или даже невозможно по следующим причинам:

- а) генеральная совокупность может быть очень большой;
- б) изучение даже отдельного элемента может стоить большого труда;
- в) в процессе изучения элементом может быть нанесен ущерб, иногда в процессе изучения они уничтожаются и т.д.

Поэтому из генеральной совокупности отбирают несколько элементов и их изучают. Эти несколько элементов называются *выборкой*. По указанным выше причинам выборка не может быть большой. Однако мы хотим распространить выводы, сделанные при изучении выборки, на всю генеральную совокупность, т.е. выборка должна быть представительной. Другими словами, выборка должна быть моделью генеральной совокупности с точки зрения интересующих нас закономерностей. Стало быть, здесь мы имеем дело с общей и принципиальной проблемой любого моделирования — надо найти компромисс между двумя противоречивыми требованиями: для уменьшения трудоемкости исследования выборки ее хочется сделать поменьше, но с другой стороны — чтобы она была представительной, ее надо сделать побольше. Это сложная проблема. Методы теории вероятностей и математической статистики позволяют частично ее решить. Подробнее на этом остановимся в дальнейшем.

Уточним теперь сам предмет исследования генеральной совокупности. Для применения количественных методов, в частности методов математической статистики, а также методов компьютерной обработки, будем считать, что изучается некоторая характеристика элементов генеральной совокупности, имеющая числовую оценку. Как в примере 2 — километраж, пройденный автомобилем. Или, как в примере 1 — стоимость костюма, который предпочитает купить анкетированный покупатель. Если же исследуемая характеристика не имеет количественной оценки, то ее легко закодировать, придав ее оттенкам числовые коды. Например, 0 (нуль) будет соответствовать отечественным костюмам, а 1 (единица) — импортным (см. пример 1).

Подведем итог. Генеральная совокупность представляется огромной необозримой совокупностью более или менее однородных объектов, у которых нас интересует некоторый количественный признак. Выборка из нее — сравнительно небольшой ряд этих объектов, с которых сняты значения признака — тем самым получен просто ряд чисел. Начальная статистическая обработка информации свелась теперь к обработке этого сравнительно небольшого ряда чисел.

Теперь, после знакомства со случайными величинами, можно по-другому взглянуть на понятие генеральной совокупности. Предположим, что исследуется с.в. X . Значит, мы имеем возможность раз за разом воспроизводить опыт, в результате которого X принимает какое-то значение. Но закон распределения X нам неизвестен. Как его найти? Очевидно, что нет никакой иной возможности, чем производить раз за разом опыты, фиксировать значения, которые принимает X , и пытаться по ряду этих значений определить закон распределения X , хотя бы приближенный. Такой вопрос уже встал перед нами, когда мы по частоте определяли приближенно вероятность случайного события.

Представим себе, хотя бы мысленно, совокупность всех значений, которые может принять с. в. X в результате производимых опытов. Это и есть исследуемая генеральная совокупность. Так мы свели изучение с.в. к изучению соответствующей генеральной совокупности (всех ее потенциальных значений). С другой стороны, пусть есть какая-то генеральная совокупность и мы интересуемся какой-нибудь характеристикой Y ее элементов. Исследование отдельного элемента генеральной совокупности можно считать проведением опыта, в ходе которого исследуемая характеристика Y принимает какое-то значение. Так мы свели изучение генеральной совокупности к изучению соответствующей случайной величины (принимающей свои значения на элементах генеральной совокупности).

Итак, в определенном смысле случайная величина и генеральная совокупность — это одно и то же. Выборка из генеральной совокупности и серия опытов со с.в. — эти понятия, в определенном смысле, также можно отождествить. В дальнейшем мы будем употреблять все эти понятия, руководствуясь соображениями удобства.

3. Характеристики выборки. Обозначим исследуемую с.в. через X . Пусть $w = \{e_1, \dots, e_n\}$ — выборка, $e_1, \dots, e_n$ — ее элементы, n — *объем выборки*.

Статистическая обработка выборки начинается с составления ряда вариантов:

а) элементы выборки $e_1, \dots, e_n$ располагают в порядке неубывания — получается *ранжированный ряд* $e_1, \dots, e_n$;

б) одинаковые как числа элементы выборки группируют в варианты $x_1, \dots, x_v$ (таким образом, v — *число вариантов выборки*).

Дальнейшая обработка записит от числа вариантов. Если оно небольшое — не более 20—25, то составляют *дискретный вариационный ряд* (ДВР).

ДВР составляют так:

1) подсчитываются частоты m_i и частоты $\hat{p}_i = m_i/n$, $i = 1, \dots, v$, вариантов (очевидно, что $\sum_i m_i = n$ и $\sum_i \hat{p}_i = 1$);

2) строится таблица $\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_1 & \dots & x_v \\ \hline \hat{p}_1 = m_1/n & \hat{p}_1 & \dots & \hat{p}_v \end{array}$, которая и называется ДВР.

По ДВР можно построить многоугольник частот — ломаную линию на плоскости, соединяющую точки с координатами $(x_i, \hat{p}_i)$.

По ДВР определяется также эмпирическая функция распределения

$$\hat{F}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq x_1, \\ \hat{p}_1 + \dots + \hat{p}_{i-1} & \text{при } x_{i-1} < z \leq x_i \quad (i = 2, \dots, v), \\ 1 & \text{при } z > x_v. \end{cases} \quad (1)$$

Если же вариантов много, то строится *интервальный вариационный ряд (ИВР)*:

1) назначаются *нижняя граница* a и *верхняя граница* b для вариантов так, чтобы отрезок $[a, b]$ вместил всю выборку; часто полагают $a = \min_i x_i$, $b = \max_i x_i$, но иногда a, b назначают из соображений удобства, но не слишком далеко от $\min_i x_i$ и $\max_i x_i$;

2) находится число v *равных по длине интервалов группирования*, которое зависит от объема выборки и должно быть не меньше 8—10 и не больше 20—25; рассчитывается *интервал группирования* $h = (b - a)/v$;

3) устанавливается *шкала интервалов* $a_1 = a, \dots, a_{i+1} = a_i + h, a_{v+1} = a_v + h = b$ и отмечаются середины этих интервалов $y_1, \dots, y_v$;

4) подсчитываются числа $m_1, \dots, m_v$ элементов выборки, попавших в каждый интервал; эти числа называются *интервальными частотами*, и *интервальные частоты* $\hat{p}_i = m_i/n$ (для этой цели можно использовать ряд вариантов — если он составлен), при подсчете частот в интервал включают его левый конец и не включают правый, но в последний интервал правый конец также включают;

5) строится таблица $\begin{array}{c|c|c|c|c} [a, a_{i+1}) & [a_1, a_2) & \dots & [a_v, a_{v+1}) \\ y_1 & y_1 & \dots & y_v \\ \hline \hat{p}_1 & \hat{p}_1 & \dots & \hat{p}_v \end{array}$, которая и называется ИВР.

Нужно отметить, впрочем, что часто ИВР называют только последние две строчки этой таблицы, т.е.

$$\begin{array}{c|c|c|c} y_1 & y_1 & \dots & y_v \\ \hline \hat{p}_1 & \hat{p}_1 & \dots & \hat{p}_v \end{array}. \quad (2)$$

По ИВР можно построить *многоугольник частот* — ломаную линию на плоскости, соединяющую точки с координатами $(y_i, \hat{p}_i)$.

По ИВР определяется также эмпирическая функция распределения

$$\hat{F}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq a_1, \\ \hat{p}_1 + \dots + \hat{p}_{i-1} & \text{при } a_i < z \leq a_{i+1} \quad (i=2, \dots, v), \\ 1 & \text{при } z > a_{v+1}. \end{cases}$$

Нужно отметить, впрочем, что эмпирическую функцию распределения определяют и по ряду (2), т.е. точно так, как (1):

$$\hat{F}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \leq y_1, \\ \hat{p}_1 + \dots + \hat{p}_{i-1} & \text{при } y_{i-1} < z \leq y_i \quad (i=2, \dots, v), \\ 1 & \text{при } z > y_v. \end{cases}$$

Из других характеристик выборки отметим *среднее значение элементов выборки*, или просто *среднее значение выборки*, или *выборочное среднее*:

$$\bar{X} = (e_1 + \dots + e_n)/n = (\sum_{i=1}^n e_i)/n,$$

или, если составлен ряд вариантов и их частот,

$$\bar{X} = (x_1 m_1 + \dots + x_v m_v)/n = (\sum_{i=1}^v x_i m_i)/n,$$

или, если составлен ДВР,

$$\bar{X} = x_1 \hat{p}_1 + \dots + x_v \hat{p}_v = \sum_{i=1}^v x_i \hat{p}_i$$

Эти два последних способа дают точное значение выборочного среднего. В случае составления ИВР по нему можно найти приближен-

ное значение выборочного среднего: $\bar{X} \approx y_1 \hat{p}_1 + \dots + y_v \hat{p}_v = \sum_{i=1}^v y_i \hat{p}_i$

Аналогом дисперсии является *выборочная дисперсия*:

$$s^2 = (\sum_{i=1}^n (e_i - \bar{X})^2)/n = (\sum_{i=1}^n e_i^2)/n - \bar{X}^2,$$

или, если составлен ряд вариантов и их частот,

$$s^2 = (\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{X})^2 m_i)/n = (\sum_{i=1}^v m_i x_i^2)/n - \bar{X}^2,$$

или, если составлен ДВР,

$$s^2 = \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{X})^2 \hat{p}_i = (\sum_{i=1}^v x_i^2 \hat{p}_i) - \bar{X}^2.$$

В случае составления ИВР по нему можно найти приближенное значение выборочной дисперсии: $s^2 \approx \sum_{i=1}^v (y_i - \bar{X})^2 \hat{p}_i = (\sum_{i=1}^v y_i^2 \hat{p}_i) - \bar{X}^2,$

Пример 3. По результатам наблюдений: 1, 7, 7, 2, 3, 2, 5, 5, 4, 6, 3, 4, 3, 5, 6, 6, 5, 5, 4, 4 построить дискретный вариационный ряд, многоугольник частостей, график выборочной функции распределения. Подсчитать выборочную среднюю и выборочную дисперсию двумя способами. Придумать правдоподобную генеральную совокупность или соответствующую случайную величину.

Решение. Объем выборки $n = 20$. Располагаем элементы выборки в порядке возрастания: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7 — получили ранжированный ряд. Теперь выделим варианты и их частоты

(в скобках): 1(1), 2(2), 3(3), 4(4), 5(5), 6(3), 7(2). Видим, что вариантов немного, значит, будем строить ДВР:

1	2	3	4	5	6	7
1/20	2/20	3/20	4/20	5/20	3/20	2/20

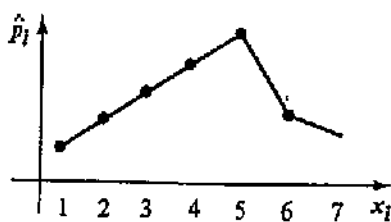


Рис. 1

Построим многоугольник частот (рис. 1).

Найдем выборочное среднее: $\bar{X} = (1 + 7 + 7 + 2 + 3 + 2 + 5 + 5 + 4 + 6 + 3 + 4 + 3 + 5 + 6 + 6 + 5 + 5 + 4)/20 = 4,15$.

Другой способ — использование ДВР: $\bar{X} = (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 7)/20 = 4,1$.

Найдем выборочную дисперсию: $s^2 = (1^2 + 7^2 + \dots + 4^2)/20 - (4,1)^2 = 431/20 - 16,81 = 4,74$.

Другой способ — использование ДВР: $s^2 = (1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + \dots + 2 \cdot 7^2)/20 - (4,1)^2 = 4,74$.

Построим график выборочной функции распределения (рис. 2).

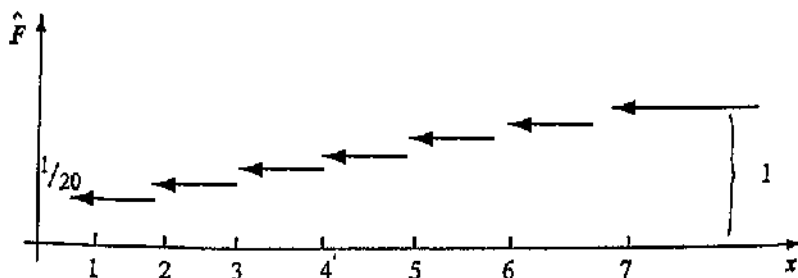


Рис. 2

Пример 4. По результатам наблюдений: 5, 11, 22, 27, 98, 87, 73, 42, 46, 37, 52, 58, 61, 74, 18, 26, 44, 45, 62, 63, 69, 81, 56, 58, 32, 35, 49, 51, 77, 39 — построить интервальный вариационный ряд, многоугольник частот, график выборочной функции распределения. Подсчитать выборочное среднее двумя способами. Придумать правдоподобную генеральную совокупность или соответствующую случайную величину.

Решение. Объем выборки $n = 30$. Располагаем элементы выборки в порядке возрастания: 5, 11, 18, 22, 26, 27, 32, 35, 37, 39, 42, 44, 45, 46, 49, 51, 52, 56, 58, 58, 61, 62, 63, 69, 73, 74, 77, 81, 87, 98 — получили ранжированный ряд. Уже при его составлении ясно, что будем составлять ИВР. Удобно взять $a = 0$, $b = 100$, $h = 10$, $v = 10$.

Строим ИВР:

(0, 10)	(10, 20)	(20, 30)	(30, 40)	(40, 50)	(50, 60)	(60, 70)	(70, 80)	(80, 90)	(90, 100)
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
1/30	2/30	3/30	4/30	5/30	5/30	4/30	3/30	2/30	1/30

Построим многоугольник частот (рис. 3).

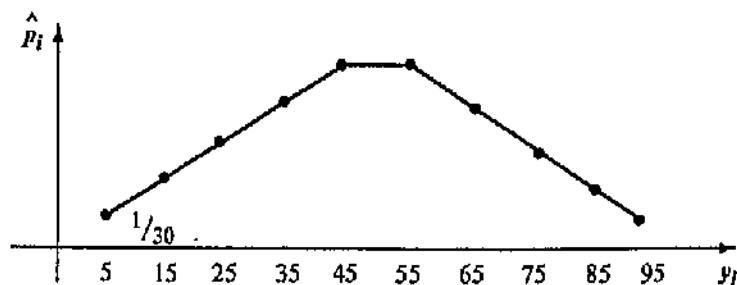


Рис. 3

Найдем выборочное среднее: $\bar{X} = (5 + 11 + 22 + 27 + 98 + 87 + 73 + 42 + 46 + 37 + 52 + 58 + 61 + 74 + 18 + 26 + 44 + 45 + 62 + 63 + 69 + 81 + 56 + 58 + 32 + 35 + 49 + 51 + 77 + 39)/30 \approx 50,4$.

Другой способ — использование ИВР:

$\bar{X} = (5 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 25 \cdot 3 + 35 \cdot 4 + 45 \cdot 5 + 55 \cdot 5 + 65 \cdot 4 + 75 \cdot 3 + 85 \cdot 2 + 95 \cdot 1)/30 = 1520/30 \approx 50,6$.

График выборочной функции распределения приведен на рис. 4.

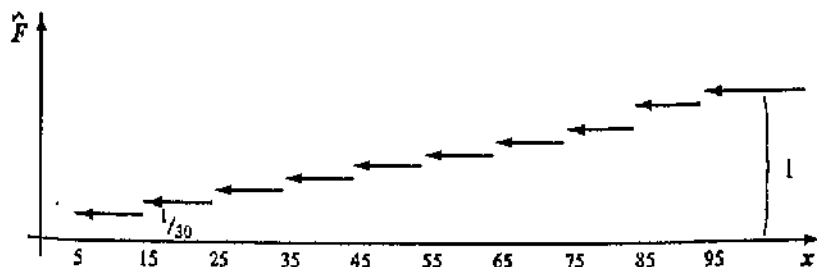


Рис. 4

ЗАДАЧИ

1. В 1996 г. в России ходили монеты 100 руб. (1% от числа всех монет), 50 руб. (15%), 20 руб. (30%), 10 руб. (20%), 5 руб. (14%) и 1 руб. (20%). У Бориса Васильевича в кармане куртки оказалось случайно 20 монет: 1 руб. (4), 5 руб. (5), 10 руб. (5), 20 руб. (5), 50 руб. (1), 100-рублевых монет не было. Подвергните эту информацию начальной статистической обработке. Какова вообще вероятность, что среди 20 случайно отобранных монет нет ни одной по 100 руб.? Известно, что монеты 1 руб. и 5 руб. желтоваты, остальные цветом похожи на серебро. Какова вероятность, что среди 10 случайно отоб-

ранных монет «серебряных» нет? Как поведут себя вероятности, о которых только что было сказано, при увеличении числа отобранных монет?

Решение. Найдем только вероятность того, что среди 20 случайно отобранных монет нет ни одной 100-рублевой. Она равна $(1 - 1/100)^{20} = (1 - 1/100)^{100 \cdot (1/5)} = e^{-1.5} \approx 0,8$.

2. Очевидно, что в примере 2 в результате обработки анкет был построен фактически ИВР. Найдите нижнюю и верхнюю границы для элементов выборки, т.е. a и b , длины интервалов, интервальные частоты и достройте ИВР. Постройте график эмпирической функции распределения, определите выборочное среднее.

3. Размер обуви взрослого мужчины есть, очевидно, д.с.в. с возможными значениями, скажем от 35 до 50. Представьте, что вы провели обследование этой с.в. Постройте примерный ДВР для нее. На основании ДВР найдите средний размер, постройте эмпирическую функцию распределения и ее график. Какой смысл имеет эта функция распределения?

4. Денежная сумма, которую оставляет покупатель в магазине, является случайной. Придумайте правдоподобный ИВР для этой с.в. На основании ИВР найдите средний размер, постройте эмпирическую функцию распределения и ее график. Какой смысл имеет эта функция распределения?

Тема 17.

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

17.1. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН, ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. Нормальный закон и параметры его задания. Этот закон играет в теории вероятностей и математической статистике выдающуюся роль.

С.в. X называется *распределенной по нормальному закону* с параметрами a и $\sigma > 0$, если X имеет плотность распределения вероятностей (график ее представлен на рис. 1):

$$f(x) = (1/(\sigma \sqrt{2\pi}))e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Как видно, с.в., распределенная по нормальному закону, является непрерывной с.в. Выясним смысл параметров a и σ . По определению математического ожидания $M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx =$

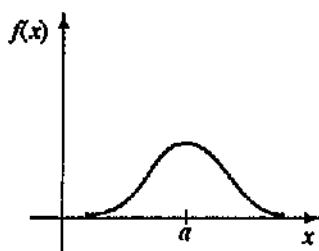


Рис. 1

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (1/(\sigma \sqrt{2\pi})) e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx. \text{ Замена переменной } x - a = u$$

сводит этот интеграл к сумме двух — $\int_{-\infty}^{+\infty} (u/(\sigma \sqrt{2\pi})) e^{-u^2/(2\sigma^2)} du$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (a/(\sigma \sqrt{2\pi})) e^{-u^2/(2\sigma^2)} du. \text{ Первый интеграл, очевидно, равен нулю. Что}$$

$$\text{касается второго, то он равен } a \int_{-\infty}^{+\infty} (1/(\sigma \sqrt{2\pi})) e^{-u^2/(2\sigma^2)} du. \text{ Если учесть,}$$

что $(1/(\sigma \sqrt{2\pi})) e^{-u^2/(2\sigma^2)}$ есть плотность нормального распределения с

$$\text{параметрами } 0 \text{ и } \sigma, \text{ то интеграл } \int_{-\infty}^{+\infty} (1/(\sigma \sqrt{2\pi})) e^{-u^2/(2\sigma^2)} du \text{ есть интеграл}$$

от этой плотности, следовательно, он равен единице. Значит, математическое ожидание равно a . Вычисление дисперсии X дает результат: $D[X] = \sigma^2$, следовательно, $\sigma = \sqrt{D[X]}$. Итак, параметр σ есть среднее квадратическое отклонение с.в. X .

То, что X есть с.в., распределенная по нормальному закону с параметрами a и σ , обозначают также так: $X \in N(a, \sigma)$.

При вычислении вероятностей такая с.в. X сводится к с.в. $Z \in N(0, 1)$. Действительно, пусть F_X, F_Z — функции распределения

$$\text{для } X, Z \text{ соответственно, тогда } F_X(t) = \int_{-\infty}^t (1/(\sigma \sqrt{2\pi})) e^{-(u-a)^2/(2\sigma^2)} du; \text{ де-}$$

для замены переменной $(u - a)/\sigma = y$, получим: $F_X(t) = F_Z((t - a)/\sigma)$. Поэтому для любых $\alpha < \beta$ имеем: $P(\alpha < X < \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha) = F_Z((\beta - a)/\sigma) - F_Z((\alpha - a)/\sigma)$.

Итак, знание функции распределения F_Z для с.в. $Z \in N(0, 1)$ позволяет находить всевозможные вероятности и для других нормально распределенных с.в. Большее распространение, чем F_Z , на-

шла, однако, функция Лапласа: $\Phi(t) = \int_0^t (1/\sqrt{2\pi})e^{-u^2/2} du$. Так как оче-

видно, что $F_Z(0) = \int_{-\infty}^0 (1/\sqrt{2\pi})e^{-u^2/2} du = 1/2$ в силу четности подынте-

гральной функции, то $\Phi(t) = F_Z(t) - 1/2$.

Следовательно, для $X \in N(a, \sigma)$ имеем: $P(\alpha < X < \beta) = \Phi((\beta - a)/\sigma) - \Phi((\alpha - a)/\sigma)$. Итак, нахождение всевозможных вероятностей для нормально распределенных с.в. свелось к функции Лапласа.

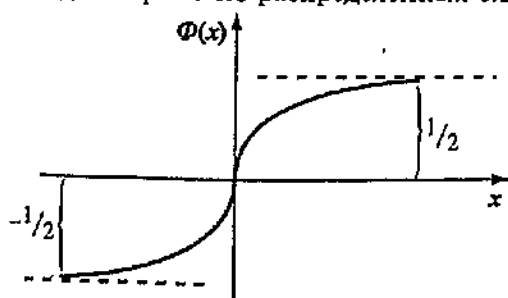


Рис. 2

Функция Лапласа не является элементарной, но изучена она очень хорошо. В любом учебнике по теории вероятностей есть таблица значений этой функции. Полезно знать, что функция Лапласа — возрастающая нечетная функция, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(-\infty) = -1/2$, $\Phi(\infty) = 1/2$. График ее приведен на рис. 2.

Полезно также запомнить, что $\Phi(3) \approx 0,498$, т.е. почти $1/2$. Это приводит к так называемому правилу «трех сигм».

Правило «трех сигм». Пусть X нормально распределена с параметрами a и σ , тогда $P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) \approx 1$ ($\approx 0,997$).

В самом деле, $P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) \approx 1$ ($\approx 0,997$).

Пример 1. Есть некоторые основания полагать, что рост случайно выбранного студента подчиняется нормальному распределению, параметр a которого, являясь математическим ожиданием, приблизительно равен среднему значению роста по студенческому контингенту; пусть $a = 174$ см. Параметр же σ определим также приблизительно, полагая, что практически все студенты имеют рост в промежутке от 156 до 192 см, тогда по правилу «трех сигм» получаем, что $\sigma = 6$.

Итак, рост $T \in N(174, 6)$. Найдем вероятности $P(T > 180)$, $P(T < 190)$, $P(160 < T < 190)$.

Решение. Для вычисления указанных вероятностей применяем формулу $P(\alpha < T < \beta) = \Phi((\beta - 174)/6) - \Phi((\alpha - 174)/6)$ и получаем:

$$P(180 < T) = P(180 < T < \infty) = 1/2 - \Phi((180 - 174)/6) = 1/2 - 0,34 = 0,16;$$

$$P(T < 190) = \Phi((190 - 174)/6) - \Phi(-\infty) = \Phi(16/6) + 1/2 \approx 0,996;$$

$$P(160 < T < 190) = \Phi((190 - 174)/6) - \Phi((160 - 174)/6) = \Phi(16/6) + + \Phi(14/6) \approx 0,496 + 0,489 = 0,985.$$

2. Закон больших чисел. В узком смысле под «законом больших чисел» понимается ряд математических теорем, которые утверждают приближение средних характеристик большого числа опытов к некоторым постоянным величинам. В широком смысле этот закон утверждает, что при очень большом числе случайных явлений средний их результат перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности.

Для доказательства важных теорем закона больших чисел необходимо ознакомиться с неравенством Чебышева.

Неравенство Чебышева. Пусть X есть с.в. с математическим ожиданием m_X и дисперсией D_X . Тогда для любого $\epsilon > 0$ вероятность того, что с.в. X отклонится от своего математического ожидания больше чем на ϵ , ограничена сверху величиной D_X/ϵ^2 :

$$P(|X - m_X| > \epsilon) \leq D_X/\epsilon^2.$$

Доказательство. Для упрощения предположим, что с.в. X дискретная и ее ряд распределения есть $\left| \frac{x_1}{p_1} \right| \dots \left| \frac{x_i}{p_i} \right| \dots$.

По определению, $D[X] = M[(X - m_X)^2] = \sum_i (x_i - m_X)^2 p_i$. Опустим часть слагаемых в этой сумме, тогда получим неравенство $D_X \geq \sum_{|x_i - m_X| > \epsilon} (x_i - m_X)^2 p_i$. Заменяя $(x_i - m_X)^2$ на ϵ^2 , мы лишь усилим неравенство: $D_X \geq \sum_{|x_i - m_X| > \epsilon} \epsilon^2 p_i$ или $D_X \geq \epsilon^2 \sum_{|x_i - m_X| > \epsilon} p_i$. Но $\sum_{|x_i - m_X| > \epsilon} p_i$ есть вероятность $P(|X - m_X| > \epsilon)$, значит, $D_X \geq \epsilon^2 P(|X - m_X| > \epsilon)$ и, деля обе части последнего неравенства на ϵ^2 , получаем неравенство Чебышева.

В силу своей общности неравенство Чебышева малоприспособно для практических надобностей — оно дает слишком грубую оценку. Пусть, например, X равномерно распределена на отрезке $[0, 10]$, тогда $m_X = 5$, $D_X = 100/12 \approx 8,3$ (см. п. 5, раздел 16.3). Оценим с по-

мощью неравенства Чебышева вероятность отклонения X от своего математического ожидания, т.е. от 5, больше чем на 0,5. Имеем: $P(|X - m_x| > 0,5) \leq D_x/0,25 = 33,2$. Легко подсчитать, что оцениваемая вероятность равна 9/10. Так как $9/10 \leq 36$, то неравенство Чебышева верно (в данном случае оно, конечно, верно уже потому, что любая вероятность не больше единицы).

Переходя к дополнительному событию, получаем другую форму неравенства Чебышева:

$$P(|X - m_x| \leq \varepsilon) > 1 - D_x/\varepsilon^2.$$

На неравенство Чебышева опирается теорема, связанная также с его именем.

Теорема Чебышева. Пусть X есть с.в. с математическим ожиданием a и дисперсией d . Будем проводить серии из n независимых опытов и вычислять среднее арифметическое Y_n значений, принятых с.в. X в таких сериях. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ $P(|Y_n - a| > \varepsilon) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Прокомментируем эту теорему. Заметим, что если проводить серии из n опытов, то от серии к серии величина Y_n будет меняться, т.е. она является случайной. Таким образом, значение Y_n совсем не обязательно совпадет с математическим ожиданием X , а будет отличаться от него. Однако насколько и как часто? Теорема Чебышева как раз утверждает, что вероятность больших отклонений среднего арифметического с.в. X от его математического ожидания стремится к нулю при росте длины серий. Так что если мы хотим быть более уверенными в том, что среднее арифметическое приближено равно математическому ожиданию, мы должны увеличить число опытов.

Доказательство теоремы Чебышева. Обозначим значение, принятое X в i -м опыте через X_i . Тогда $Y_n = (\sum_{i=1}^n X_i)/n$. По свойствам ма-

тематического ожидания имеем: $M[Y_n] = (1/n) \sum_{i=1}^n M[X_i]$. Но все с.в. X_i

$i = 1, \dots, n$ распределены как с.в. X , так что $M[X_i] = M[X] = a$ и потому $M[Y_n] = a$. Так как опыты проводятся независимо, то с.в. X_i независи-

мы, значит, по свойствам дисперсии имеем: $D[Y_n] = (1/n^2) \sum_{i=1}^n D[X_i] =$

$= d/n$. Теперь применим неравенство Чебышева для с.в. Y_n : $P(|Y_n - M[Y_n]| > \varepsilon) \leq D[Y_n]/\varepsilon^2$ или $P(|Y_n - a| > \varepsilon) \leq d/(n\varepsilon^2)$. Так как $d/(n\varepsilon^2) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то и $P(|Y_n - a| > \varepsilon) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Из теоремы Чебышева вытекает другая теорема.

Теорема Бернулли. Пусть событие A имеет вероятность p . Будем проводить серии из n независимых опытов и вычислять частоту γ_n наступления события A в таких сериях. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P(|\gamma_n - p| > \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. По событию A определим с.в. X , которая равна единице, если A произошло, и нулю, если A не произошло. Тогда $M[X] = p$, $D[X] = pq$. Определенная в доказательстве теоремы Чебышева с.в. Y_n есть не что иное, как частота γ_n наступления события A в серии. Следовательно, по теореме Чебышева получаем: $P(|\gamma_n - p| > \varepsilon) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема Бернулли — одна из центральных в теории вероятностей, ведь она устанавливает точную связь между частотой и вероятностью события. Прокомментируем эту теорему. Заметим, что если проводить серии из n опытов, то от серии к серии частота γ_n будет меняться, т.е. она является случайной величиной. Таким образом, ее значение совсем не обязательно совпадет с вероятностью события. Теорема Бернулли как раз утверждает, что вероятность больших отклонений частоты случайного события от его вероятности стремится к нулю при росте длины серий. Так что если мы хотим быть более уверены в том, что частота приближенно равна вероятности события, мы должны увеличить число опытов.

3. Центральная предельная теорема и ее следствия. Эта теорема устанавливает предельное распределение сумм большого числа с.в. Простейшая форма этой теоремы такова.

Центральная предельная теорема (ЦПТ). Пусть $X_1, \dots, X_n, \dots$ — независимые и одинаково распределенные с.в., тогда при

$n \rightarrow \infty$ закон распределения суммы $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ неограниченно приближается к нормальному. Более точно, при $n \rightarrow \infty$ равномерно по α и β имеем: $P(\alpha < (Z - na)/(\sigma \sqrt{n}) < \beta) \rightarrow \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$, где a , σ — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение с.в. X_i , а Φ — функция Лапласа.

Это значит, что закон распределения с.в. $(Z_n - na)/(\sigma \sqrt{n})$ неограниченно приближается к нормальному закону с параметрами 0, 1. Итак, при большом числе складываемых независимых и одинаково распределенных с.в. закон их распределения приближенно можно считать нормальным.

Пример 2. Количество тонн цемента, взятое за день с цементного склада, является с.в. с рядом распределения $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 20 & 40 \\ \hline 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ \hline \end{array}$. С какой вероятностью 2000 т цемента хватит на квартал — 90 дней?

Решение. Обозначим через X_i случайное количество цемента, взятое в i -й день со склада. Будем считать, что все эти величины независимы и одинаково распределены с вышеуказанным рядом распределения. Тогда их математическое ожидание равно 20, а дисперсия 200. В соответствии с ЦПТ закон распределения их суммы за квартал Z_{90} — приближенно нормальный с параметрами: $M[Z_{90}] = 90 \cdot 20 = 1800$, $D[Z_{90}] = 90 \cdot 200 = 18000$ и $\sigma_{Z_{90}} = \sqrt{D[Z_{90}]} = 134$. Следовательно, $P(Z_{90} \leq 2000) = \Phi((2000 - 1800)/134) + 1/2 \approx 0,93$.

Следствием ЦПТ является следующая теорема.

Интегральная теорема Муавра—Лапласа. Пусть событие A имеет вероятность p . Будем проводить серии из n независимых опытов и подсчитывать число k наступления события A в таких сериях. Тогда при большом n

$$P(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi((k_2 - np)/\sqrt{npq}) - \Phi((k_1 - np)/\sqrt{npq}).$$

Для доказательства отметим только, что число k можно представить суммой n независимых и одинаково распределенных с.в., после чего надо воспользоваться ЦПТ.

Пример 3. При изготовлении отливок получается 20% дефектных. Сколько необходимо запланировать отливок к изготовлению, чтобы с вероятностью 0,95 получилось не менее 50 бездефектных?

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Муавра—Лапласа. Имеем $p = 4/5$, значит, $q = 1/5$, $P(50 \leq k) = 0,95$, а n неизвестно, его и надо найти. С другой стороны, $P(50 \leq k) = 1/2 - \Phi(u)$, где $u = (50 - np)/\sqrt{npq}$. Следовательно, $\Phi(u) = -0,45$. По таблице значений функции Лапласа находим: $u = -1,64$. Итак, $(4n/5 - 50) = 1,64 \sqrt{4n/25}$. Решая это уравнение, получаем: $n \geq 69$.

ЗАДАЧИ

1. Как выглядит правило «трех сигм» для произвольной с.в.?

Ответ. Воспользуемся неравенством Чебышева: $P(|X - m_X| \leq 3\sigma_X) > 1 - D_X/(9\sigma_X^2)$, т.е. $P(|X - m_X| \leq 3\sigma_X) \geq 1 - 1/9$, т.е. окончательно получаем $P(|X - m_X| \leq 3\sigma_X) > 8/9$.

2. С.в. X распределена по нормальному закону с параметрами $\mu = 2$ и $\sigma = 4$. Найдите вероятности $P(X > 1)$, $P(2 < X < 5)$, $P(X < 2)$, $P(X = 3)$. Напишите функции плотности и распределения и постройте их примерные графики. Как выглядит для данной с.в. правило «трех сигм»?

3. Банкомат выдает стандартные суммы в 500 дол., 100 дол. и 50 дол., причем первые составляют лишь 10%, а последние 60% всех выдач. В сутки банкомат осуществляет примерно 100 выдач. Сколько же долларов надо заложить в банкомат утром, чтобы до следующего утра их хватило с вероятностью, не меньшей 0,9?

4. В районе 10 универсамов, примерно одинаковых. Суммарная суточная выручка в них равна в среднем 10 млн руб. и в 90% всех случаев отличается от 10 млн руб. не более чем на 1 млн руб. Найдите вероятности того, что очередная суточная суммарная выручка: а) превысит 12 млн руб.; б) окажется меньше 9 млн руб.; в) окажется в пределах от 8 до 12 млн руб.

5. Станок для изготовления ДСП разрегулирован и выпускает плиты, толщина которых нормально распределена $N(22 \text{ мм}, \sigma = 1 \text{ мм})$ вместо $N(20 \text{ мм}, \sigma' = 1 \text{ мм})$. Каков в процентах перерасход сырья? Каков процент брака (брак — это выход за отклонение в 3 мм)? Предложите способ убедиться в том, что станок разрегулирован.

17.2. ПРИМЕНЕНИЯ ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ

1. Усреднение влияния независимых факторов. Закон больших чисел утверждает, что при очень большом числе случайных явлений средний их результат перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности. Вот примеры этого.

Пример 1. Так, хотя невозможно предсказать, какую конкретно сумму снимет или положит на свой вклад очередной клиент сбербанка, суммарное значение этих операций за день останется примерно одним и тем же в обычные будничные дни.

Пример 2. Суммарная продажа бензина на АЗС примерно одна и та же в обычные будничные дни.

Пример 3. Крупный банк ведет множество финансовых операций: на межбанковском рынке кредитует другие банки и сам занимает деньги, принимает и выдает вклады физических лиц, продает и покупает акции и облигации и т.п. При этом проигрыш по некоторым направлениям компенсируется выигрышем на других, что обеспечивает банку устойчивое финансовое положение.

Указанная в примере 3 стратегия работы банка соответствует народной мудрости: «не клади все яйца в одну корзину» — и представляет, по сути дела, единственный разумный принцип работы на финансовом рынке. Научное название этого принципа — *принцип диверсификации* (переведем как принцип «разнообразия»). Он означает, что нужно проводить разнообразные, не связанные друг с другом операции, тогда убытки от одних операций будут более или менее покрыты прибылью от других операций.

Скажем сразу же, что следование этому принципу не принесет максимально большого дохода, но зато обеспечит устойчивую работу, некоторый средний доход и уберезет от больших убытков.

Математическим выражением этого принципа является следующее предложение.

Предложение. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые, одинаково распределенные с.в. с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ . Пусть Y_n — их среднее арифметическое. Тогда $M[Y_n] = a$, $\sigma[Y_n] = \sigma/\sqrt{n}$.

Доказательство — простое упражнение на свойства математического ожидания и дисперсии.

Если с.в. X трактовать как случайные доходы от некоторых операций (независимых и примерно одинаковых по масштабности), а среднее квадратическое отклонение (СКО) как величину риска, то получаем следующий вывод.

Вывод о диверсификации. При усреднении результатов независимых и примерно одинаковых по масштабности операций средний доход также усредняется, а риск однозначно уменьшается, т.е. диверсификация ведет к усреднению дохода и к уменьшению риска.

Для иллюстрации рассмотрим диверсификацию двух различных операций.

Пример 4. Рассмотрим две независимые операции со случайным доходом: $Q_1 = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 20 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 & 0,3 \end{bmatrix}$, $Q_2 = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 10 & 20 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}$.

Вычислим средние доходы и риски (СКО): $\bar{Q}_1 = 10$, $D[Q_1] = 80$, $\sigma_1 = 8,9$; $\bar{Q}_2 = 10$, $D[Q_2] = 100$, $\sigma_2 = 10$. Вместо того чтобы провести только одну какую-нибудь операцию (на обе не хватит средств), вложим половину денег в каждую операцию, т.е. проведем операцию $Q = 0,5 \cdot Q_1 + 0,5 \cdot Q_2$. Легко видеть, что $\bar{Q} = 10$, а $D[Q] = D[Q_1]/4 + D[Q_2]/4 = 180/4 = 45$, следовательно, $\sigma_Q = \sqrt{45} \approx 6,4$. Итак, ожидаемый средний доход остался прежним, а риск стал меньше минимального из рисков операций!

2. Понятие о страховании. В страховании немало терминов, нуждающихся в пояснении.

Страхователь (или застрахованный) — тот, кто страхуется.

Страховщик — тот, кто страхует.

Страховая сумма — сумма денежных средств, на которую застраховано имущество, жизнь, здоровье страхователя. Эта сумма выплачивается страховщиком страхователю при наступлении страхового случая. Размер страховой суммы зависит от очень многих обстоя-

ятельств и варьируется в весьма широких пределах. Выплата страховой суммы называется *страховым возмещением*.

Страховой тариф — плата с единицы страховой суммы. Тариф состоит из *нетто-ставки*, предназначенной для выплат страховых сумм, и *нагрузки* к нетто-ставке, необходимой для обеспечения рентабельности работы страховщика. Плата со всей страховой суммой называется *страховым платежом* — платится страхователем страховщику.

Теория страхования фактически опирается на одну аксиому.

Аксиома. Среднее суммарное (т.е. по всем страховым договорам) страховое возмещение должно быть равно суммарным страховым платежам по нетто-ставкам.

Предположим для простоты, что разрабатывается кампания по страхованию дачных домиков от пожара сроком на один год на одну и ту же сумму S в дачном товариществе. Предполагается, что будет заключено довольно много договоров страхования (по крайней мере, несколько десятков). Какуло назначить нетто-ставку и нагрузку к ней?

Примем для простоты, что все n членов товарищества заключают договоры страхования. Для простоты будем также считать, что вероятность сгореть за год одна и та же для всех домиков, пусть она равна p . Определим с.в. $X_i = 1$ или 0 в зависимости от того, сгорит за этот год i -й домик или нет. Тогда все X_i независимы и одинаково распре-

делены с рядом распределения $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{vmatrix}$, математическим ожиданием

$M[X_i] = p$ и дисперсией $D[X_i] = pq$.

Число домов, сгораемых в данном товариществе за год, есть с.в.

$K = \sum_{i=1}^n X_i$. Легко видеть, что $M[K] = np$, $D[K] = npq$, $\sigma_K = \sqrt{npq}$. Кроме

того, по центральной предельной теореме K распределено по нормальному закону.

Суммарное страховое возмещение $W = KS$, где S — страховая сумма, математическое ожидание W есть $M[K] \cdot S = npS$. Столько же страховщик должен получить со всех страхователей, следовательно, нетто-ставка равна $(npS)/(nS) = p$.

Итак, по крайней мере в теоретическом плане нетто-ставка есть просто вероятность страхового случая.

А как с нагрузкой к нетто-ставке? Поскольку суммарное страховое возмещение $W = KS$ есть случайная величина, то при тарифе p , равном нетто-ставке p , страховщик получит со всех страхователей сумму $E = pnS$, а как легко видеть из свойств нормального распределения, $P(W > E) = 1/2$. Иными словами, в половине случаев страхов-

щик будет в убытке! Это ему не нравится и он сам должен «подстраховаться», т.е. он должен назначить тариф t больше, чем нетто-ставка. Предположим, что страховщик задался вероятностью γ того, чтобы суммарное страховое возмещение оказалось меньше суммарных страховых платежей. Тогда надо найти t из условия $P(W < E) = \gamma$. Но

$P(W < E) = P(KS < tnS) = P(K < nt) = \Phi((nt - np)/\sqrt{npq}) + 1/2$, т.е. $\Phi((t - p)\sqrt{n}/\sqrt{pq}) = \gamma - 1/2$. Обозначим через v значение функции Лапласа Φ , при котором $\Phi(v) = \gamma - 1/2$. Тогда $(t - p)\sqrt{n}/\sqrt{pq} = v$,

значит, $t = p + v\sqrt{pq}/\sqrt{n}$. Это и есть основа для формирования тарифа. При этом в среднем суммарные страховые платежи превысят суммарное страховое возмещение на $nSv\sqrt{pq}/\sqrt{n} = Sv\sqrt{npq}$. С учетом этой величины тариф может еще увеличиться или уменьшиться для обеспечения необходимой рентабельности работы страховщика.

В реальности страховщик не располагает величиной p , а знает только статистику числа дачных домиков в этом товариществе, сгоревших в разные годы, т.е. он имеет ряд $K_1, \dots, K_l$ числа сгоревших домов. Поэтому приходится неизвестные величины, т.е. прежде всего p , заменять их статистическими оценками. В частности, вместо p используется ее оценка — частота $\hat{p} = (K_1 + \dots + K_l)/l$.

В реальности страховщики действуют «от достигнутого». Это значит, что в зависимости от конкретных обстоятельств они увеличивают или уменьшают тариф. Например, если предстоящее лето прогнозируется очень жарким и сухим, то тариф может быть усилен.

Коснемся немного вопросов страхования жизни и здоровья людей. Этими вопросами занимается так называемая *актуарная математика*.

В основе этой теории лежит представление о продолжительности человеческой жизни как случайной величины X . Пусть F — функция распределения X , т.е. $F(t) = P(X < t)$ есть вероятность прожить менее t лет, в то же время $1 - F(t)$, обозначаемая $s(t)$, как легко видеть, есть вероятность прожить по крайней мере t лет. Функция $s(t)$ называется *функцией выживания*. Конечно, фактически функции F и s всегда относятся к некоторым большим группам людей. Например, в целом по США в последние годы функция $s(t)$ была такова (взято из [9]):

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
$s(t)$	1,00	0,983	0,977	0,965	0,949	0,915	0,837	0,682	0,432	0,142	0,012	0,0

На основе этих двух функций F и s определяются много других величин, используемых в расчетах по страхованию жизни и здоровья людей. В развитых странах этим вопросам уделяется большое внима-

ние. В силу этого актуарная математика представляет собой серьезную и строгую теорию. В России это направление в страховании делает только первые шаги.

3. Обеспечение репрезентативности выборки. Выборка из генеральной совокупности называется *представительной*, или *репрезентативной*, если она позволяет судить о свойствах всей генеральной совокупности. Как обеспечить представительность выборки?

Самым простым способом, обеспечивающим репрезентативность выборки, является случайный отбор с возвращением в генеральную совокупность отобранного (и исследованного) элемента.

Это можно сделать, организовав отбор так, чтобы элементы генеральной совокупности имели равные возможности попасть в выборку. Обеспечить это можно, например, с помощью таблицы случайных чисел. Но в наши дни чаще используются компьютерные датчики псевдослучайных чисел. При обращении к такому датчику (обычно с помощью какого-нибудь оператора *Random* с аргументом или нет) он выдает число, «равномерно распределенное на отрезке $[0, 1]$ ». Это означает, что выдаваемые датчиком последовательные числа равномерно плотно покрывают отрезок $[0, 1]$, т.е. при выдаче датчиком k таких чисел на участке длины l будет примерно lk этих чисел. Кроме того, нет видимой закономерности в последовательных числах, выдаваемых датчиком. Обычно числа, выдаваемые датчиком, имеют много знаков после запятой.

Предположим теперь, что генеральная совокупность имеет N членов. Их нумеруют последовательными натуральными числами. Пусть N расположено между 10^m и 10^{m+1} . Запускают компьютерный датчик, получают от него число x , берут m знаков после запятой, получают натуральное число L . Если $L \leq N$, то элемент с номером L отбирают в выборку. Потом снова обращаются к датчику и так до тех пор, пока не отберут нужное число элементов выборки.

Конечно, чем больше объем выборки, тем больше у нее шансов быть представительной. Но по многим причинам желательно иметь выборку как можно меньшего объема. Как совместить эти противоречивые требования?

Предположим, что цель исследования заключается в оценке среднего по генеральной совокупности или математического ожидания с.в. X . По центральной предельной теореме можно оценить вероятность отклонения среднего арифметического $\bar{X}$ выборки объемом n от математического ожидания m_X , именно $P(|\bar{X} - m_X| < \epsilon) = 2\Phi(\epsilon\sqrt{n}/\sigma_X)$. Если мы хотим с вероятностью γ гарантировать, что это отклонение не превзойдет ϵ , то, значит, должно быть $2\Phi(\epsilon\sqrt{n}/\sigma_X) = \gamma$.

Обозначим через u_γ значение аргумента функции Лапласа, при котором она равна Δ , тогда получаем $\varepsilon\sqrt{n}/\sigma_x = u_{\gamma/2}$, откуда $n = u_{\gamma/2}^2 \sigma_x^2 / \varepsilon^2$.

В частном случае — когда речь идет о числе опытов n , гарантирующем с вероятностью γ , что отклонение частоты от вероятности события p не превысит ε , можно поступить следующим образом. В формуле $n = u_{\gamma/2}^2 \sigma_x^2 / \varepsilon^2$ неизвестно σ_x . Однако $\sigma_x^2 = p(1-p) \leq 1/4$. Значит, $n \leq u_{\gamma/2}^2 / (4\varepsilon^2)$ и за необходимое число опытов можно взять $u_{\gamma/2}^2 / (4\varepsilon^2)$. Эта формула завышает нужное число n , если p значительно отклоняется от $1/2$. Если удастся оценить σ_x сверху, то это может уменьшить число n .

Пример 5. Относительно игрального кубика появилось подозрение, что грань с шестеркой тяжелее других, в силу чего вероятность выпадения шестерки не намного, но больше $1/6$. Какое число бросков кубика гарантирует с вероятностью $0,9$, что отклонение частоты от вероятности выпадения шестерки не превысит $0,04$? (И тогда, если частота отклонится от $1/6$ больше чем на $0,04$, то это значит, что кубик, наверное, неправильный.)

Решение. Используем только что выведенную формулу при $\gamma = 0,9$, $\varepsilon = 0,04$. По таблице значений функции Лапласа находим $u_{\gamma/2} \approx 1,64$. Далее, очевидно, что вероятность выпадения шестерки не может слишком сильно отклониться от $1/6$, пусть $p \leq 1/5$, тогда $p(1-p) \leq 4/25$ и потому $n \leq (1,64)^2 \times (4/25) / 0,0016 \approx 268$.

Пример 6. Накануне важного референдума было решено провести выборочный опрос. Примерное распределение голосов было известно — около 20% воздержавшихся, остальные поровну «за» и «против». Сколько надо опросить людей, чтобы с вероятностью $0,9$ гарантировать отклонение числа опрошенных «за» от истинного не более чем на 2% от всего электората?

Решение. Введем с.в. $X = +1, -1, 0$ в зависимости от голосования «за», «против», «воздержался». Тогда $P(X=1) = p$ и p неизвестно, хотя и не далеко от $0,4$. С другой стороны $D_X \approx 0,8$, значит, $\sigma_X \approx 0,9$. Далее, $\gamma = 0,9$, $\varepsilon = 0,02$. Получаем: $n \approx (1,64)^2 \cdot (0,9)^2 / 0,0004 \approx 6700$.

З а м е ч а н и е. Опрос общественного мнения — дело весьма квалифицированное. Достигаемая при этом точность редко выходит за пределы $\pm 4\%$, так как для увеличения точности в два раза надо опросить в четыре раза больше людей, и т.п.

ЗАДАЧИ

1. Приведите примеры применения принципа диверсификации в торговле, в сельском хозяйстве и т.п.

2. В актуарной математике часто работают не с функцией выживания $z(x)$, а с величиной $l_x = l_0 z(x)$, где l_0 — довольно большая величина, часто ее берут равной $100\,000$. Объясните смысл величины l_x .

Тема 18.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

18.1. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Многомерные случайные величины. *Многомерной случайной величиной* называется величина, которая при проведении опыта принимает в качестве своего значения не число, а целый набор чисел, заранее неизвестно каких. Эти наборы, которые с. в. может принять, образуют множество ее возможных значений. Таким образом, хотя конкретный набор не предугадать, он будет из множества возможных наборов (часто это множество хорошо известно).

Пример 1. При врачебном осмотре каждому призывнику записывают в его карточку показатели физического развития (рост, вес, объем легких и т.п.). Ограничимся первыми двумя показателями. Получится *двумерная с.в.* $\xi = (H, W)$, где H — рост, а W — вес. Впрочем, весьма часто такую двумерную с.в. называют также *системой (H, W) двух с.в.* H, W — компонент с.в. ξ , принимающих свои значения некоторым согласованным образом. Как в данном примере — ведь, как правило, большему росту соответствует больший вес, и наоборот. Известна даже формула, приближенно описывающая эту связь: $W(\text{кг}) = H(\text{см}) - 100$.

Остановимся подробнее на двумерных с.в. Как и обычные с.в. (т.е. одномерные), они также бывают дискретные и непрерывные. У дискретных множество возможных значений счетно, непрерывные устроены более сложно.

Двумерная дискретная величина $\xi = (X, Y)$ задается *таблицей распределения*, в которой перечисляются возможные значения компонент X, Y соответственно по горизонтали и вертикали, а число p_{ij} есть вероятность $P(X=x_i, Y=y_j)$. Ясно, что сумма всех этих вероятностей равна единице. Такая таблица есть полный аналог ряда распределения для д.с.в. Она позволяет находить все возможные вероятности о двумерной д.с.в. или о системе двух с.в.

$X \backslash Y$	x_1	...	x_j	x_n
y_1	p_{11}	...	p_{1j}	p_{1n}
y_i		...	p_{ij}	
y_m		...	p_{mj}	p_{mn}

Пример 2. Отвлечемся от числовой природы с.в. и рассмотрим распределение девушек по цвету глаз и цвету волос.

По цвету волос	По цвету глаз		
	Карие	Голубые	Зеленые
Блондинки	0,06	0,34	0,17
Брюнетки	0,36	0,04	0,03

Смысл чисел в таблице понятен: блондинки с карими глазами составляют 6%, с голубыми — 34% и т.д.

А эта таблица дает распределение девушек по цвету волос. Для этого пришлось сложить числа в каждой строке.

По цвету волос.

Блондинки	0,57
Брюнетки	0,43

А эта таблица дает распределение девушек по цвету глаз. Для этого пришлось сложить числа в каждом столбце.

По цвету глаз

Карие	Голубые	Зеленые
0,42	0,38	0,20

Составим еще условные законы распределения.

Блондинок по цвету глаз

Карие	Голубые	Зеленые
6/57	34/57	17/57

Кареглазых по цвету волос

Блондинки	Брюнетки
6/42	36/42

Так же надо действовать в общем случае. Событие $(X = a)$ есть, очевидно, сумма событий $(X = a, Y = b)$, где b пробегает все возможные значения компоненты Y и события эти попарно несовместны. Значит, $P(X = a) = \sum_b P(X = a, Y = b)$, т.е. для нахождения этой вероятности надо сложить все вероятности в соответствующем столбце.

Пример 3. Пусть (X, Y) имеет следующую таблицу распределения.

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	0	0,1	0,5
1	0,2	0,1	0,1

Найти законы распределения компонент X, Y и условный закон распределения компоненты X при условии, что $Y = 0$. Найти вероятность того, что X примет значение, меньшее чем Y .

Решение. Законы распределения компонент (сложим соответствующие значения вероятностей

по столбцам (для X) и строкам (для Y): $X: \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{vmatrix}$, $Y: \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0,6 & 0,4 \end{vmatrix}$.

Условный закон распределения компоненты X при условии, что $Y = 0$ — это набор возможных значений компоненты X вместе с условными вероятностями $P(X = a/Y = 0)$ (ранее условная вероятность обозначалась $P_{(Y=0)}(X = a)$). При вычислении этих вероятностей надо использовать формулу для условной вероятности: $P(X = a/Y = 0) = P(X = a, Y = 0)/P(Y = 0)$. Получаем ряд распределения компоненты X при условии, что $Y = 0$:

$X/(Y = 0): \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/6 & 5/6 \end{vmatrix}$.

Для нахождения $P(X < Y)$ отметим в таблице пары значений (X, Y) , которые удовлетворяют условию $(X < Y)$, и соответствующие вероятности сложим. Получим: $P(X < Y) = 0 + 0,2 + 0,1 = 0,3$.

2. **Корреляция и независимость с.в.** В предыдущем пункте упоминалась двумерная с.в. $\xi = (H, W) = (\text{рост, вес})$. Компоненты этой с.в. не ведут себя независимо друг от друга, хотя по значению одной из этих компонент в общем нельзя предсказать значение другой, однако, как правило, большему росту соответствует больший вес, и наоборот. Такие с.в., т.е. когда по изменению одной можно в какой-то мере предугадать изменение другой, называются *коррелированными* (точное определение будет дано далее).

Напомним, что с.в. X, Y называются *независимыми*, если $P(X=a, Y=b) = P(X=a) \cdot P(Y=b)$ для любых a, b . Таблица распределения системы (X, Y) независимых с.в. устроена очень просто — числа p_{ij} в таблицах есть произведения чисел $p_i = P(X=x_i)$ и $q_j = P(Y=y_j)$.

Пример 4. Из повседневной жизни мы знаем, что среди блондинок кареглазых меньше, чем среди брюнеток. Следовательно, эти признаки «цвет глаз» и «цвет волос» не являются независимыми. Приведенная выше (см. третью по порядку таблицу в примере 2, п. 1) таблица совместного распределения этих признаков составлена с учетом этого. В самом деле, среди всех девушек кареглазых 0,42, а среди блондинок — 6/57, что менее 0,42.

Двумерная непрерывная с.в. $\xi = (X, Y)$, понимаемая также как система двух с.в. X, Y , задается с помощью двумерной плотности распределения вероятностей $f(x, y)$, а вероятности находятся при помощи интегрирования плотности $f(x, y)$ по соответствующим областям плоскости. Если компоненты X, Y независимы, то двумерная плотность равна произведению плотностей компонент X, Y : $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

С.в. X, Y называются *некоррелированными*, если их корреляционный момент $K_{XY} = M[(X - m_X)(Y - m_Y)]$ равен нулю, и *коррелированными* в противном случае.

По свойствам математического ожидания имеем: $M[(X - m_X)(Y - m_Y)] = M[XY - m_X Y - X m_Y + m_X m_Y] = M[XY] - m_X M[Y] - m_Y M[X] + m_X m_Y = M[XY] - m_X m_Y$. Это выражение для корреляционного момента иногда удобнее.

Некоррелированность слабее независимости, как утверждает следующее предложение.

Предложение 1. Независимые с.в. некоррелированы.

Действительно, пусть с.в. X, Y независимы, тогда по свойствам математического ожидания (см. п.2, раздел 16.1) $M[XY] = m_X m_Y$ значит, $K_{XY} = M[XY] - m_X m_Y = 0$.

Если корреляционный момент положителен, то с.в. называются *положительно коррелированными*, если отрицателен — *отрицательно коррелированными*.

Вместо корреляционного момента часто удобно использовать коэффициент корреляции $k_{XY} = K_{XY} / (\sigma_X \sigma_Y)$, где σ_X, σ_Y — средние квадратические отклонения с.в. X, Y .

Пример 5. Найдем коэффициент корреляции k_{XY} для с.в. X, Y из примера 3. Ряды распределения компонент X, Y уже составлены (см. пример 3). По ним находим: $m_X = 0,4$, $D_X = 0,64$, $m_Y = 0,4$, $D_Y = 0,24$. Теперь найдем $M[XY]$. Для этого переберем все клетки таблицы, перемножим значения компонент X, Y и вероятности, записанной в этой клетке, и все эти произведения сложим. Итак, $M[XY] = 0 + 0 + 0 + (-1) \cdot 0,2 + 0 + 1 \cdot 0,1 = -0,1$. Теперь получаем: $K_{XY} = M[XY] - m_X m_Y = -0,1 - 0,16 = -0,26$. Окончательно получаем: $k_{XY} = K_{XY}/(\sigma_X \sigma_Y) = -0,26/\sqrt{0,64 \cdot 0,24} \approx -0,66$.

Оказывается, что коэффициент корреляции показывает степень линейной функциональной зависимости между с.в.

Предложение 2. Пусть $Y = eX + d$, где e, d — константы, тогда коэффициент корреляции с.в. X, Y равен единице со знаком коэффициента e .

Доказательство. Имеем: $K_{XY} = M[XY] - m_X m_Y = M[eX^2 + dX] - m_X(em_X + d) = eM[X^2] + dm_X - em_X^2 - dm_X = e(M[X^2] - m_X^2) = eD_X = e\sigma_X^2(e\sigma_X)$. С другой стороны, $D_Y = e^2 D_X$, тем самым $\sigma_Y = |e|\sigma_X$. Следовательно, $k_{XY} = K_{XY}/(\sigma_X \sigma_Y) = e\sigma_X^2/|e|\sigma_X^2 = \pm 1$, причем знак перед единицей определяется знаком e .

Верно и обратное предложение.

Предложение 3. Всегда $|k_{XY}| \leq 1$.

Доказательство. Рассмотрим с.в. $Z = \sigma_Y X \pm \sigma_X Y$. Вычислим ее дисперсию: $D[Z] = \sigma_Y^2 D[X] \pm 2\sigma_X \sigma_Y K_{XY} + \sigma_X^2 D[Y] = \sigma_Y^2 \sigma_X^2 \pm 2\sigma_X \sigma_Y K_{XY} + \sigma_X^2 \sigma_Y^2 = 2\sigma_X^2 \sigma_Y^2 \pm 2\sigma_X \sigma_Y K_{XY}$. Но дисперсия всегда неотрицательна, значит, $2\sigma_X^2 \sigma_Y^2 \pm 2\sigma_X \sigma_Y K_{XY} \geq 0$ или $\sigma_X \sigma_Y \pm K_{XY} \geq 0$, откуда $|K_{XY}| \leq \sigma_X \sigma_Y$ и, следовательно, $|k_{XY}| \leq 1$.

3. Функции случайных величин. Пусть X — с.в., а $y = \varphi(x)$ — обычная функция, область определения которой содержит множество возможных значений с.в. X , тогда $Y = \varphi(X)$ есть с.в., являющаяся функцией от с.в. X . Значения свои она принимает так: проводим опыт, в ходе опыта с.в. X принимает какое-то значение x ; зная функцию φ , находим $y = \varphi(x)$ — это y и есть значение, принятое с.в. Y .

Говорят также, что X есть аргумент функционально зависимой с.в. Y .

Пример 6. Обменный пункт меняет доллары на рубли по фиксированному курсу 5730. Кассирша для отчетности записывает выданные клиентам рублевые суммы. Поскольку предъявляемые к обмену долларовые суммы X случайны, то случайны и записываемые кассиршей рублевые суммы Y . Однако ясно, что $Y = 5730 \cdot X$.

Общая проблема здесь — как, зная распределение случайного аргумента X , определить закон распределения функции $Y = \varphi(X)$ от

него. Когда X — д.с.в., это обычно не трудно — см. задачу 7 из 3-го и 4-го вариантов контрольной работы № 5 приложения 5. Когда же X — н.с.в., это сложнее. Ограничимся следующей теоремой, доказывать которую не будем.

Теорема. Пусть X — н.с.в. с плотностью распределения $f(x)$, а $\varphi(x)$ — монотонная дифференцируемая функция, тогда плотность распределения с.в. $Y = \varphi(X)$ есть

$$g(y) = f(\psi(y))|\psi'(y)|. \quad (1)$$

Здесь $\psi(y)$ — функция, обратная к φ .

Пример 7. Пусть X показательна распределена с параметром λ , а $Y = cX$, где c — константа. Покажем, что Y также показательна распределена.

В данном случае плотность X есть $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \end{cases}$ а функция $\varphi(x)$ есть cx , значит, обратная функция $\psi(y) = y/c$ и $\psi'(y) = 1/c$.

Подставляя в формулу (1), получаем: $g(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \leq 0, \\ (\lambda/c)e^{-\lambda y/c} & \text{при } y > 0, \end{cases}$ а это и есть плотность показательного распределения.

Более частная задача — определение математического ожидания с.в., являющейся функцией от другой с.в., решается сравнительно просто.

Предложение 4. Пусть $Y = \varphi(X)$, тогда $M[Y] = \sum_i \varphi(x_i)p_i$, если

с.в. X дискретна и $M[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)dx$, если с.в. X непрерывна и ее плотность есть $f(x)$.

Пример 8. За каждый процент перевыполнения плана полагается премия 50 руб., а за каждый процент невыполнения заработок уменьшается на 30 руб., но не более чем на 100 руб. Найти ожидаемый размер премии, если прогноз выполнения плана таков:

96	97	98	99	100	101	102	103	104	110
0,01	0,02	0,03	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,08	0,04

Каков ожидаемый размер премии, если известно, что план выполнен? **Решение.** Найдем ожидаемый размер премии. Размер премии Y есть функция от процента выполнения плана. К прогнозу выполнения плана пристраиваем снизу еще строку значений Y (в руб.):

96	97	98	99	100	101	102	103	104	110
0,01	0,02	0,03	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,08	0,04
-100	-90	-60	-30	0	50	100	150	200	500

Теперь подсчитаем математическое ожидание Y , умножая значения Y на вероятности и складывая эти произведения. Получаем: $M\{Y\} = (-100 - 180 - 180 - 60 + 1000 + 1000 + 1500 + 1600 + 2000)/100 = 65,80$ руб.

ЗАДАЧИ

1. Независимые с.в. X и Y имеют ряды распределения:

$$X: \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 2 \\ \hline 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ \hline \end{array}, \quad Y: \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & 1 \\ \hline 0,4 & 0,6 \\ \hline \end{array}.$$

Составить ряды распределения с.в. $Z = X \cdot Y$ и $V = X - Y$.

Решение. Составляем таблицу:

$Y \backslash X$	-1	0	2
-1	0,04	0,08	0,28
1	0,06	0,12	0,42

В клетке (a, b) пишем вероятность $P(X=a) \times P(Y=b)$, так как X, Y независимы. Теперь перебираем клетки таблицы и, перемножая значения с.в. X, Y , получаем значения с.в. Z . Затем складываем вероятности одинаковых значений

$$Z \text{ и получаем ряд ее распределения: } Z: \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0,28 & 0,06 & 0,2 & 0,04 & 0,42 \\ \hline \end{array}.$$

Примерно так же составляется ряд распределения с.в. V .

2. На заводе три одинаковых и независимо работающих цеха. В начале месяца по каждому цеху был составлен вероятностный прогноз выполнения плана:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,9 & 1,0 & 1,1 \\ \hline 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,85 & 1,0 & 1,05 \\ \hline 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0,8 & 1,0 & 1,1 \\ \hline 0,05 & 0,9 & 0,05 \\ \hline \end{array}.$$

Какова вероятность выполнения плана всем заводом? Известно, что два первых цеха план выполнили. Какова вероятность, что и весь завод план выполнит?

3. Кредитный отдел банка проанализировал выданные кредиты по двум параметрам: по величине и по длительности. Получилась такая таблица:

	Краткосрочные	Долгосрочные
Мелкие	0,3	0,2
Средние	0,2	0,05
Крупные	0,2	0,05

Определите, независимы ли эти параметры? Найдите законы распределения краткосрочных и долгосрочных кредитов по величине кредитов. Определите вероятность того, что кредит долгосрочный, если он не мелкий.

4. Докажите, что линейная функция от равномерно распределенной с.в. является также линейно распределенной.

18.2. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ

1. Основные задачи математической статистики. Опираясь на такие понятия, как события и их вероятности, формулы полной вероятности, Байеса и Бернулли, случайные величины, их законы распределения и числовые характеристики и т.п., теория вероятностей позволяет чисто математически определять вероятности одних событий через вероятности других, находить законы распределения одних с.в., зная законы распределения других с.в., и т.д. Такие задачи называются *прямыми*. Например, из центральной предельной теоремы вытекает, что какова бы ни была с.в. X , если проводить независимые опыты и подсчитывать среднее арифметическое $\bar{Y}_n$ значений, принятых X за эти n опытов, то при больших n среднее арифметическое $\bar{Y}_n$ распределено приближенно по нормальному закону. Во всех областях науки есть прямые задачи. Например, рассчитать напряженность электростатического поля, зная распределение и величины зарядов, создающих это поле, — это прямая задача.

А обратная задача такова: поле уже создано какими-то неизвестными зарядами, поле мы можем измерить в различных точках, и требуется определить, где эти неизвестные заряды и какой они величины. А вот пример *обратной вероятностной задачи*: по частоте наступления события в серии опытов найти вероятность этого события или хотя бы определить границы, в которых должна находиться эта вероятность. Такие обратные вероятностные задачи решает математическая статистика. Итак, теория вероятностей (ТВ) и математическая статистика (МС) — науки родственные и сильно взаимосвязанные: одна решает прямые задачи, другая — обратные. Но решать прямые задачи приходится ранее, в силу чего ТВ имеет собственные методы исследования, независимые от МС, и потому ТВ является теоретическим фундаментом МС. Кроме того, обычно решать обратные задачи труднее — вот еще почему МС изучают немного позже ТВ.

Можно также сказать, что прямые задачи — это когда по известным источникам надо рассчитать их проявления; обратные задачи — по проявлениям определить источники. Следовательно, МС должна собрать эти проявления, проанализировать их и т.д.

Для решения этих своих задач математическая статистика разрабатывает методы регистрации, описания, обработки, анализа экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения массовых случайных явлений.

Обычно изучаемые массовые случайные явления объединены понятием генеральной совокупности или случайной величины.

Наибольшее значение имеют четыре крупные задачи математической статистики,

А. Представление статистической информации в компактной, понятной, удобной форме.

Б. Нахождение или оценка неизвестных параметров генеральной совокупности или случайной величины; например, нахождение или оценка среднего по генеральной совокупности или математического ожидания с.в.

В. Проверка гипотез, их принятие или отвержение.

Г. Определение неизвестного закона распределения исследуемой с.в. Впрочем, если закон распределения известен с точностью до значения некоторого параметра, то эта задача может рассматриваться как задача Б.

С задачами А мы уже имели дело в разделе 16.4. Вообще говоря, эта задача во многом является и задачей обычной статистики (не математической).

С задачами Б, Г будем иметь дело в данном разделе.

2. Точечные оценки параметров генеральной совокупности или с.в. Как уже было обсуждено в п. 1 раздела 16.4, понятия генеральной совокупности и с.в. взаимозаменяемы, и употребление этих понятий диктуется соображениями удобства. После знакомства с многомерными с.в. более удобно (хотя бы на некоторое время) употреблять понятие с.в. Итак, пусть исследуется с.в. X . Тогда выборка объемом n — это просто значение n -мерной с.в. $V = (X_1, \dots, X_n)$, где X_i — значение, принятое с.в. X в i -м опыте.

Любая функция от выборки называется *статистикой*. Например, среднее арифметическое $\bar{X}_n = (\sum_{i=1}^n X_i)/n$ есть статистика.

Пусть Θ — некоторый параметр с.в. X . Мы хотим определить, хотя бы приближенно, значение этого параметра. С этой целью подбираем статистику $\hat{\Theta}$, которая, по нашему мнению, должна оценивать, может быть приближенно, параметр Θ . Именно поэтому статистику, оценивающую параметр Θ , обозначают $\hat{\Theta}$.

Заметим, что любая статистика есть случайная величина, поскольку она определена на выборках. Статистику $\hat{\Theta}$, определенную на выборках объемом n , будем обозначать $\hat{\Theta}_n$.

Разумеется, чтобы признать за статистикой $\hat{\Theta}$ право быть оценкой параметра Θ , статистика $\hat{\Theta}$ должна удовлетворять некоторым требованиям. Эти требования таковы.

1) **Состоятельность:** статистика-оценка $\hat{\Theta}_n$ должна сходиться к оцениваемому параметру Θ при $n \rightarrow \infty$. Сходимость понимается в вероятностном смысле: $P(|\hat{\Theta}_n - \Theta| > \varepsilon) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Такая сходимость называется еще *сходимостью по вероятности*.

2) **Несмещенность:** $M[\hat{\Theta}_n] = \Theta$ для всех достаточно больших n .

Убедимся в том, что среднее арифметическое есть состоятельная и несмещенная оценка математического ожидания.

Пусть X — исследуемая с.в. с математическим ожиданием a .

Тогда среднее арифметическое за n опытов есть $\bar{X} = (\sum_{i=1}^n X_i)/n$.

Для доказательства состоятельности надо доказать, что $P(|\bar{X} - a| > \varepsilon) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$. Но именно это утверждает в теореме Чебышева (см. п. 2, раздел 17.1). Что же касается несмещенности, то имеем:

$$M[\bar{X}] = M[(\sum_{i=1}^n X_i)/n] = (\sum_{i=1}^n M[X_i])/n = (na)/n = a.$$

Отсюда следует также, что частота наступления события есть состоятельная и несмещенная оценка вероятности события.

В дальнейшем также не будем указывать индекс n в выражении среднего арифметического, которое будем называть просто *средним*.

Так как среднее как бы заменяет собой математическое ожидание, то выборочная дисперсия $s^2 = (\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)/n$ может рассматриваться как оценка дисперсии D_X . Так как $\bar{X}$ является состоятельной оценкой математического ожидания, то s^2 является состоятельной оценкой дисперсии. Но эта оценка не является несмещенной, ибо можно доказать, что $M[s^2] = D_X(n-1)/n$. Поэтому s^2 «подправляют», умножая ее на $n/(n-1)$, после чего исправленная статистика $\bar{s}^2 = ns^2/(n-1) = (\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2)/(n-1)$ является несмещенной (и состоятельной) оценкой дисперсии.

Пример 1. Пусть с.в. X имеет ряд распределения

0	1	2
$1/2$	$1/3$	$1/6$

Как видно, множество возможных значений имеет три элемента. Рассмотрим следующие статистики, определенные на выборках $W = (X_1, \dots, X_n)$: а) $m = \min W$; б) $M = \max W$; в) $S =$ «число различных чисел в W ». Являются ли эти статистики состоятельными, несмещенными оценками соответствующих характеристик с.в. X ?

Решение. Ряд распределения статистики m :

0	1	2
$1 - (1/2)^n$	$(1/2)^n - (1/6)^n$	$(1/6)^n$

Действительно, $P(m=0) = 1 - (P(X>0))^n = 1 - (1/2)^n$. Далее, $P(m=2) = (P(X=2))^n = (1/6)^n$. Ну, а вся остальная вероятность есть $P(m=1)$. Поскольку $P(m=0) = 1 - (1/2)^n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, то m есть состоятельная оценка минимального из возможных значений X , т.е. числа 0. Так как, очевидно, что $M[m] > 0$ при любом объеме выборки, то m не является несмещенной оценкой.

Две остальные статистики исследуются аналогично.

3. Метод максимального правдоподобия. Для применения этого метода нахождения оценки неизвестного параметра сначала составляют функцию правдоподобия. Пусть X — исследуемая с.в., закон распределения которой известен с точностью до некоторого параметра α . При проведении n независимых опытов получаем n -мерную с.в. $W = (X_1, \dots, X_n)$, где X_i — значение с.в. X , принятое ею в i -м опыте. Проведем n независимых опытов и получим выборку $W = (a_1, \dots, a_n)$. Если X — дискретная с.в., то вероятность полученной выборки равна произведению вероятностей $P(X = a_1, \alpha) \dots P(X = a_n, \alpha)$, а если X — непрерывная с.в. с плотностью $f(x, \alpha)$, то значение плотности n -мерной с.в. $W = (X_1, \dots, X_n)$ в точке $w = (a_1, \dots, a_n)$ равно произведению плотностей $f(a_1, \alpha) \dots f(a_n, \alpha)$. Функция $L(a_1, \dots, a_n, \alpha)$, равная произведению вероятностей или плотностей (в зависимости от того, дискретная с.в. X или нет), называется *функцией правдоподобия*.

Найдем теперь значение α_0 параметра α , при котором функция правдоподобия имеет максимум. Это значение α_0 и есть оценка настоящего значения параметра α .

Пример 2. Пусть X есть д.с.в. всего с двумя возможными значениями: единица с вероятностью p и нуль с вероятностью $1 - p$. Покажем, что среднее по серии опытов есть оценка p по методу максимального правдоподобия. Пусть в n опытах получены значения $(a_1, \dots, a_n)$, из них k единиц. Функция правдоподобия получается по формуле Бернулли и имеет вид: $L(a_1, \dots, a_n, p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Чтобы найти, при каком p эта функция имеет максимум, продифференцируем ее по p (считая $a_1, \dots, a_n$ константами) и приравняем потом производную к нулю. Получим $k p^{k-1} (1-p) - (n-k) p^k \times (1-p)^{n-k-1} = 0$, что дает $k(1-p) - (n-k)p = 0$ и окончательно: $p = k/n$. Но k/n и есть среднее по серии опытов.

Из этого примера можно сделать также следующий вывод.

Вывод. Частота наступления события в серии опытов есть оценка вероятности этого события по методу максимального правдоподобия.

4. Интервальные оценки. Любая статистика $\hat{\Theta}$, являясь с.в., может быть лишь приближенным значением оцениваемого параметра Θ . Таким образом, она может быть лишь точечной оценкой. Возникает вопрос: нельзя ли указать такой интервал Δ , который бы с заранее заданной, близкой к единице, вероятностью γ покрывал неизвестное нам истинное значение параметра Θ ? При этом заранее задаваемая вероятность γ называется *доверительной вероятностью*, а интервал Δ — *доверительным интервалом*.

Из общих соображений ясно, что доверительный интервал, определяемый выборкой — случайной (многомерной) величиной, сам

будет случайным как по расположению, так и по длине. Если имеется какая-нибудь состоятельная оценка $\hat{\Theta}$ параметра Θ , то с ростом объема выборки конструируемый по ней доверительный интервал должен, видимо, покрывать и эту оценку. Поэтому границы доверительных интервалов обычно привязывают к такой оценке. Нахождение доверительных интервалов покажем на примере.

Пример 3. Сконструируем доверительный интервал для математического ожидания с.в. X , распределенной по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием a и известной дисперсией σ^2 . Зададимся доверительной вероятностью γ .

По центральной предельной теореме (см. п. 3, раздел 17.1) при достаточно большом n среднее арифметическое $\bar{X}$ распределено приблизительно по нормальному закону и потому имеем: $P(|\bar{X} - a| < u\sigma/\sqrt{n}) = 2\Phi(u) = \gamma$. По таблице значений функции Лапласа найдем $u_{\gamma/2}$ такое, что $\Phi(u_{\gamma/2}) = \gamma/2$. Значит, $|\bar{X} - a| < u_{\gamma/2}\sigma/\sqrt{n}$. Отсюда $\bar{X} - u_{\gamma/2}\sigma/\sqrt{n} < a < \bar{X} + u_{\gamma/2}\sigma/\sqrt{n}$. Это и есть доверительный интервал для a .

ЗАДАЧИ

1. Случайным образом выбрали (как это организовать на самом деле?) и проанализировали 400 кредитов, выданных банком. Не возвращены оказались 80. Найти доверительный интервал с уровнем доверия 0,95 для вероятности невозврата кредита по всей совокупности выданных банком кредитов.

Решение. При достаточно большом n (≥ 100) отклонение частоты события $\hat{p}$ от его вероятности p имеет приблизительно нормальное распределение, следовательно, $P(|\hat{p} - p| < u\sqrt{p(1-p)/n}) = 2\Phi(u)$. Найдем по таблице значений функции Лапласа такое u^* , чтобы $2\Phi(u^*) = 0,95$. Получаем $u^* \approx 1,96$. При таком большом n (≥ 400) выражение $p(1-p)/n$ можно заменить его приближенным значением $\hat{p}(1-\hat{p})/n \approx 1/2500$. Далее, получаем: $1/5 - 1,96 \cdot (1/50) < p < 1/5 + 1,96 \cdot (1/50)$. Окончательно, $1/5 - 1/25 < p < 1/5 + 1/25$, т.е. $0,16 < p < 0,24$.

2. Случайная величина распределена равномерно на отрезке $[0, b]$, где $b > 0$. Для следующих статистик, определенных на выборках W объемом n : а) $m = \min W$; б) $M = \max W$, напишите функции распределения, плотности и постройте примерные графики этих функций. Являются ли эти статистики состоятельными, несмещенными оценками соответствующих характеристик с.в. X ? Докажите, что статистика из б) $M = \max W$ есть оценка параметра b по методу максимального правдоподобия.

3. В совершенно одинаковых коробках на складе лежат телефоны белого, красного и черного цвета; телефонов каждого цвета примерно треть. Какое минимальное количество коробок надо взять, чтобы с вероятностью, большей 0,9, в них оказались телефоны всех трех цветов? Найдите распределение статистики «число различных цветов телефонов выборки». Является ли эта статистика состоятельной, несмещенной оценкой константы 3?

4. Докажите, что среднее значений, принятых с.в. X в серии опытов, есть оценка математического ожидания с.в. X по методу максимального правдоподобия, если X распределена по нормальному или показательному закону.

5. Размер кредита, выдаваемого банком, колеблется в широких пределах, и доля кредитов, больших чем z , равна $e^{-\lambda z}$, где λ — некоторый параметр, характеризующий в некотором смысле данный банк. Для оценки этого параметра проанализировали с десятков случайно выбранных кредитов и оценили λ по методу максимального правдоподобия. Что получили? Является ли полученная оценка состоятельной, несмещенной? Объясните, для чего полезно знать значение λ .

6. Пусть исследуемая с.в. X является непрерывной, тогда для ряда ее значений (выборки) составляется интервальный вариационный ряд — ИВР (см. п. 3, раздел 16.4). Известно, что среднее $\bar{X}_n$, подсчитанное по ИВР, вообще отличается от среднего по выборке (см. пример 4 в разделе 16.4). Будет ли $\bar{X}_n$ несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания с.в. X ?

18.3. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

1. Типы зависимостей между случайными величинами. С.в. X, Y связаны функциональной зависимостью, если $Y = \varphi(X)$, где φ — обычная числовая функция. Ранее (в разделе 18.1, пример б) приводился пример такой зависимости: X есть случайная сумма в долларах, сдаваемая в обменный пункт очередным клиентом, а Y — получаемая им рублевая сумма. В этом случае $Y = kX$, где k — курс доллара.

Это очень жесткая зависимость. С другой стороны, когда X, Y независимы, в теоретико-вероятностном смысле — это полное отсутствие всякой зависимости, ведь условные законы распределения с.в. Y по отношению к X не меняются в зависимости от значений X .

Итак, функциональная зависимость и независимость — два крайних полюса зависимости между с.в.

Если же независимости между с.в. X, Y нет, то говорят об их *статистической зависимости* — это когда при изменении значения одной величины меняется распределение другой.

Далее. В п. 2 раздела 18.1 уже говорилось о корреляционной зависимости между с.в. X и Y — это когда корреляционный момент K_{XY} или коэффициент корреляции k_{XY} не равны нулю. Было также доказано, что $|k_{XY}| \leq 1$ и равенство $|k_{XY}| = 1$ характеризует линейную функциональную зависимость между X и Y .

И еще один тип зависимости. Если $M[Y/X = a]$ меняется в зависимости от a , то говорят о *регрессионной зависимости* Y от X , при этом сама эта зависимость называется *регрессией* Y на X (переведем, как «отклик», буквальный перевод слова «*regression*» — «упадок, возвращение» не подходит). Впрочем, эту зависимость также называют часто *корреляционной*.

Такая зависимость имеет также место, когда на функциональную зависимость φ с.в. Y от X — основную зависимость — накладываются неконтролируемые случайные возмущения, так что получается $Y = \varphi(X) + \epsilon$, где ϵ — некоторая с.в., обычно с нулевым математическим ожиданием, влияющая на Y , но независимая от X .

Одна из с.в., зависимость между которыми анализируется, обычно называется *фактором*, тогда другая считается зависимой от этого фактора.

Пример 1. Рассмотрим два случая: а) пусть (X, Y) — двумерная с.в., равномерно распределенная в прямоугольнике на плоскости, стороны которого горизонтальны и вертикальны, тогда X, Y независимы; б) пусть (X, Y) — двумерная с.в., равномерно распределенная в круге на плоскости, тогда X, Y зависимы, но некоррелированы и между ними нет регрессионной зависимости.

Пример 2. Регрессионная зависимость имеется: а) между ростом и весом человека — средний вес более высоких людей также больше; б) между урожайностью с гектара и количеством внесенных на гектар удобрений: чем больше внесено удобрений, тем больше средняя урожайность; в) между продажной ценой автомобиля и его возрастом: чем больше возраст, тем меньше средняя продажная цена.

2. Корреляционное отношение. Оно является показателем степени статистической зависимости. Итак, пусть с.в. Y зависит в основном от фактора X и некоторого остаточного фактора (обычно небольшого по величине) в виде с.в. ϵ , которая влияет на Y , но не на X . Характеристикой общей изменчивости значений с.в. Y является ее дисперсия $D[Y] = M[(Y - m_Y)^2]$. Но в эту величину вносят свой вклад и фактор X , и остаток ϵ . Каков же их вклад? Чтобы избежать громоздких обозначений, будем обозначать через $\bar{Z}$ результат усреднения значений с.в. Z , т.е. ее математическое ожидание.

При фиксированном значении фактора X , например при $X = a$, дисперсия $D[Y/X = a] = M[(Y/X = a - M\{Y/X = a\})^2]$ условного распределения $Y/X = a$ как раз характеризует влияние на Y остатка ϵ при

этом значении фактора X , а ее среднее значение, т.е. $\overline{D[Y/X=a]}$, характеризует влияние в целом остатка ε на Y . Обозначается через $D[Y, \text{ост}]$.

Математическое ожидание $M[Y/X=a]$ — это центр группирования значений с.в. Y при $X=a$. В то же время $M[Y]$ — это общий центр группирования Y . Поэтому разброс групповых центров отно-

сительно общего центра определяет дисперсию $(M[Y/X=a] - M[Y])^2$. Эта величина и определяет изменчивость значений Y , вызванную фактором X . Обозначается $D[Y, \text{фак}]$.

Можно доказать, что $D[Y] = D[Y, \text{фак}] + D[Y, \text{ост}]$.

Обозначим $D[Y, \text{фак}]/D[Y]$ или $1 - D[Y, \text{ост}]/D[Y]$ через ρ_{YX}^2 . Ясно, что ρ_{YX}^2 показывает, какая доля вариации значений с.в. Y обусловлена вариацией значений фактора X . Величина ρ_{YX}^2 называется

коэффициентом детерминации, а $\rho_{YX} = \sqrt{\rho_{YX}^2}$ называется *корреляционным отношением*. Относительно корреляционного отношения справедливы следующие утверждения:

- 1) $0 \leq \rho_{YX} \leq 1$;
- 2) условие $\rho_{YX} = 1$ необходимо и достаточно для однозначной функциональной зависимости Y от X .

Действительно, если $\rho_{YX} = 1$, то $\overline{D[Y/X=a]} = 0$, но поскольку $D[Y/X=a] \geq 0$, то это означает, что $D[Y/X=a] = 0$ при всяком a . А это, в свою очередь, означает, что Y есть константа при всяком значении фактора X , т.е. Y есть функция от X .

С другой стороны, если Y есть функция от X , то $D[Y/X=a] = 0$ при всяком a , но тогда и $\overline{D[Y/X=a]} = 0$ и, значит, $\rho_{YX} = 1$;

- 3) условие $\rho_{YX} = 0$ необходимо и достаточно для отсутствия регрессионной зависимости Y от X .

Действительно, если $\rho_{YX} = 0$, то $M[Y/X=a] = M[Y]$, т.е. $M[Y/X=a]$ есть константа — значит, нет регрессионной зависимости Y от X . Легко убедиться и в обратном;

- 4) чем ближе ρ_{YX} к единице, тем ближе статистическая зависимость Y от X к однозначной функциональной, и наоборот — чем ближе зависимость Y от X к однозначной функциональной, тем ближе ρ_{YX} к единице.

На практике совместное распределение с.в. X, Y , как правило, неизвестно, и вместо всех параметров используются их выборочные оценки. Пусть имеется n независимых наблюдений двумерной случайной величины (X, Y) . Результаты этих наблюдений, т.е. пары наблюдаемых значений (x_i, y_i) , расположим в двумерную корреляционную таблицу. Она строится так: наблюдаемые значения $x_1, \dots, x_n$ фактора X группируем в v групп, наблюдаемые значения $y_1, \dots, y_n$ группи-

встречаются в q групп. Затем подсчитываем числа m_{jl} , $l = 1, \dots, v$, $j = 1, \dots, q$ таких наблюдений (x, y) , в которых x попало в l -ю группу, а y — в j -ю группу.

$j \backslash l$						$m_j = \sum_l m_{jl}$
	$Y \backslash X$	1	2	...	v	
1	y_1	m_{11}	m_{12}	...	m_{1v}	m_1
2	y_2	m_{21}	m_{22}	...	m_{2v}	m_2
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\vdots$
q	y_q	m_{q1}	m_{q2}	...	m_{qv}	m_q
$n_l = \sum_j m_{jl} - m_l$		m_1	m_2	...	m_v	$m = \sum_l \sum_j m_{jl} = \sum_l n_l$
$\bar{y}^{(l)}$		$\bar{y}^{(1)}$	$\bar{y}^{(2)}$	...	$\bar{y}^{(v)}$	
s_l^2		s_1^2	s_2^2	...	s_v^2	

Построим выборочный аналог $\hat{\rho}_{Y/X}^2$ коэффициента детерминации. Выборочным аналогом $D[Y]$ является $s_Y^2 = \sum_j (y_j - \bar{y})^2 m_j / n$, где

$\bar{y} = \sum_j y_j m_j / n$ — общая средняя.

Выборочным аналогом условной дисперсии при $x = x_l$ является групповая выборочная дисперсия $s_l^2 = \sum_j (y_j - \bar{y}^{(l)})^2 m_{jl} / n_l$, где $\bar{y}^{(l)} = \sum_j (y_j m_{jl}) / n_l$ — групповая средняя, а аналогом $D[Y, \text{ост}]$ является

$$s_{\text{ост}}^2 = \overline{s_l^2} = \sum_l s_l^2 n_l / n.$$

Отсюда уже можно определить выборочный аналог $D[Y, \text{фак}]$, именно $s_{\text{фак}}^2 = s_Y^2 - s_{\text{ост}}^2$, и окончательно определить выборочный аналог коэффициента детерминации $\hat{\rho}_{Y/X}^2 = s_{\text{фак}}^2 / s_Y^2$ и выборочное корреляционное отношение $\hat{\rho}_{Y/X} = \sqrt{\hat{\rho}_{Y/X}^2}$.

Относительно $\hat{\rho}_{Y/X}$ справедливы утверждения, аналогичные утверждениям относительно корреляционного отношения (см. выше «1» — «4»).

Пример 3. Система с.в. (X, Y) имеет таблицу распределения.

Найти коэффициент детерминации и корреляционное отношение между X и Y .

$Y \backslash X$	-1	1
-2	0,4	0
0	0,1	0,1
2	0	0,4

Решение. Находим ряд распределения Y , его математическое ожидание и дисперсию: $Y: \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{vmatrix}$,

$$M[Y] = 0, D[Y] = 3,2.$$

Теперь найдем условные законы распределения:

$$Y/X = -1 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0,8 & 0,2 & 0 \end{vmatrix}, Y/X = 1 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix}, \text{ математические ожидания:}$$

$$M[Y/X = -1] = -1,6, M[Y/X = 1] = 1,6 \text{ и дисперсии: } D[Y/X = -1] = 0,64, D[Y/X = 1] = 0,64.$$

Усредняя, получаем: $D[Y, \text{ост}] = D[Y/X = -1] \cdot P(X = -1) + D[Y/X = 1] \times P(X = 1) = 0,64$. Следовательно, коэффициент детерминации равен $1 - D[Y, \text{ост}]/D[Y] = 1 - 0,64/3,2 = 4/5$ и корреляционное отношение $\rho_{YX} = \sqrt{4/5} \approx 0,9$.

Близость ρ_{YX} к единице указывает на то, что зависимость Y от X близка к функциональной. И в самом деле, из таблицы видно, что при данном значении X с большой вероятностью соблюдается равенство $Y = 2X$.

3. Линейная однофакторная регрессия. Рассмотрим систему двух с.в. (X, Y) . Попробуем подобрать линейную зависимость $y = a + bx = \varphi(x)$ так, чтобы $F(a, b) = M[(Y - a - bX)^2]$ было минимальным. Имеем: $F(a, b) = M[Y^2 - 2aY - 2bXY + a^2 + 2abX + b^2X^2] = M[Y^2] - 2aM[Y] - 2bM[XY] + a^2 + 2abM[X] + b^2M[X^2]$. Дифференцируя $F(a, b)$ частным образом по a и b и приравнявая частные производные нулю,

получим систему уравнений:
$$\begin{cases} a + bM[X] = M[Y], \\ aM[X] + bM[X^2] = M[XY]. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим: $b = K_{XY}/D_X$, $a = M[Y] - M[X]K_{XY}/D_X$, значит, искомая линейная зависимость есть $y = \varphi(x) = (M[Y] - M[X] \times K_{XY}/D_X) + xK_{XY}/D_X = M[Y] + (x - M[X])K_{XY}/D_X$. Или, учитывая, что корреляционный момент K_{XY} равен $k_{XY}\sigma_X\sigma_Y$, где k_{XY} — коэффициент корреляции, эту зависимость записывают по-другому: $y = m_Y + (x - m_X)k_{XY}\sigma_Y/\sigma_X$. Итак, $\varphi(x) = m_Y + (x - m_X)k_{XY}\sigma_Y/\sigma_X$.

При этих a, b величина $F(a, b)$, называемая ошибкой приближения $\varphi(x)$, равна $M[(Y - \varphi(X))^2] = \dots = \sigma_Y^2(1 - k_{XY}^2)$ (вычисления опущены).

Так же можно найти ошибку регрессии $M[(M[Y/X] - \varphi(X))^2] = \dots = \sigma_Y^2(\rho_{Y/X}^2 - k_{Y/X}^2)$ (вычисления опущены).

Отсюда следуют два вывода:

1) с приближением $|k_{XY}|$ к единице уменьшается ошибка приближения, или, иначе, возрастает концентрация значений двумерной с.в. (X, Y) около прямой линии, выражаемой уравнением

$y = m_Y + (x - m_X)k_{XY}\sigma_Y/\sigma_X$ Верно и обратное утверждение. Это означает, что k_{XY} показывает степень линейной функциональной зависимости между с.в. (такой вывод был уже сделан в п. 2 раздела 17.1);

2) с приближением $|k_{XY}|$ к ρ_{YX} уменьшается ошибка регрессии, т.е. неизвестная функция регрессии приближается к линейной функции. Верно и обратное. Это позволяет использовать разность $(\rho_{Y/X}^2 - k_{XY}^2)$ в качестве меры отклонения функции регрессии от линейной.

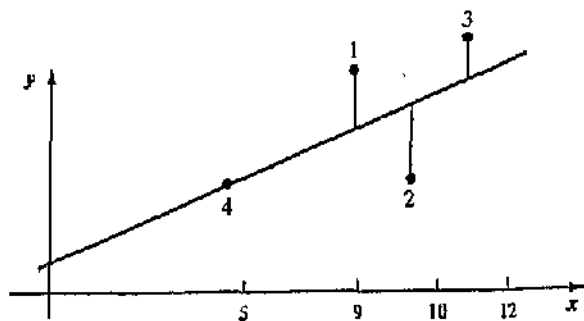
На практике совместное распределение с.в. (X, Y) неизвестно, известны только результаты наблюдений, т.е. выборка пар (x, y) значений с.в. (X, Y) . Все рассмотренные величины заменяются их выборочными аналогами. Так, для определения a, b получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + b\bar{X} = \bar{Y}, \\ a\bar{X} + b\bar{X}^2 = \overline{XY}. \end{cases} \quad (1)$$

Решая эту систему, получим: $b = (\overline{XY} - \bar{X}\bar{Y})/(\bar{X}^2 - (\bar{X})^2) = \hat{K}_{XY}/s_X^2$, $a = \bar{Y} - \bar{X}\hat{K}_{XY}/s_X^2$, значит, прямая линия регрессии имеет уравнение $y = \bar{Y} + (x - \bar{X})\hat{K}_{XY}/s_X^2$. Через $\hat{K}_{XY}$, s_X^2 обозначаем выборочные аналоги корреляционного момента с.в. X, Y и дисперсии X соответственно.

Или, учитывая, что выборочный аналог корреляционного момента $\hat{K}_{XY}$ равен $\hat{k}_{XY}s_Xs_Y$, где $\hat{k}_{XY}$ — выборочный аналог коэффициента корреляции, эту зависимость записывают по-другому: $y = \bar{Y} + (x - \bar{X})\hat{k}_{XY}s_Y/s_X$

Пример 4. Найти оценки параметров линейной регрессии по выборке $(9, 6), (10, 4), (12, 7), (5, 3)$. Изобразить заданные точки и прямую регрессии в прямоугольной системе координат. Пройдет ли прямая регрессии через точку (X, Y) ? Показать на графике разности $(y_i - \varphi(x_i))$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Будет ли сумма этих разностей равна нулю?



Решение. Находим $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{X^2}$, $\bar{XY}$. Получаем: $\bar{X} = (9 + 10 + 12 + 5)/4 = 9$, $\bar{Y} = 5$, $\bar{X^2} = 350/4$, $\bar{XY} = 193/4$. Значит, $b = 1/2$; $a = 1/2$ (см. систему (1) для нахождения a , b). Итак, уравнение регрессии есть $y = (x + 1)/2$. Изобразим указанные точки и линию регрессии в системе координат на плоскости (см. рисунок).

Ответы на остальные вопросы: да, прямая регрессии обязательно проходит через точку средних значений; да, сумма этих разностей обязательно равна нулю (объясните сами эти ответы).

ЗАДАЧИ

1. Система с.в. (X, Y) равномерно распределена в параллелограмме с вершинами $(2, 1 \pm 1/4)$ и $(4, 2 \pm 1/4)$. Найдите корреляционное отношение между X и Y .

Указание. В данной ситуации $Y = X/2 + v$, причем X , v независимы и равномерно распределены — X на отрезке $(2, 4)$, v на отрезке $(-1/4, 1/4)$.

2. Опросите нескольких своих знакомых об их весе и росте и обработайте полученную информацию аналогично тому, как это сделано в примере 4.

Тема 19.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ФИНАНСОВОГО РЫНКА

19.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ФИНАНСОВОГО РЫНКА И ЕГО СОСТАВЛЯЮЩИХ

1. **Соглашения о финансовом рынке.** На финансовом рынке его участники проводят финансовые операции с помощью финансовых инструментов.

Финансовой называется операция, начальное и конечное состояния которой имеют денежную оценку и цель проведения которой заключается в максимизации дохода.

В дальнейшем под *операцией* понимается финансовая операция.

Финансовый инструмент — любой документ или множество документов, с которыми связаны финансовые обязательства (например, данный выпуск акций или данный тираж ГКО).

Результат большинства операций невозможно предсказать заранее. Также невозможно, в общем, предсказать заранее и другие ка-

кие-либо характеристики операции, такие, как *доход* и *доходность*. Но практическая работа настойчиво требует этого. Выход заключается в принятии определенных соглашений о рынке, позволяющих привлекать для анализа хоть какие-то научные доводы. В основном настаивают на трех предположениях.

Предположение 1. «Скрытые» параметры (типа психологических мотивов) не учитываются. Любой участник рынка стремится действовать так, чтобы обеспечить себе наибольший доход, а не действовать «назло» своему конкуренту и тем самым непредсказуемо с объективной точки зрения. Данное предположение есть принципиальное основание для применения научных методов анализа рынка.

Предположение 2. Хотя с чисто абстрактной точки зрения состояний рынка бесконечно много и они полностью, со всеми деталями не повторяются, все же довольно часто для данного сегодняшнего анализируемого состояния может найтись близкое аналогичное состояние в прошлом или в другом месте. Это позволяет надеяться на то, что и дальнейшее развитие сегодняшнего состояния пойдет примерно так же, как и найденного аналогичного (с учетом, понятно, изменений, происшедших на рынке). Такой способ анализа называется *поиском аналогов*. Это предположение о рынке можно развить далее, предположив, что различные показатели рынка можно моделировать как случайные величины. Данное предположение открывает путь к использованию теоретико-вероятностных методов. Нужно совершенно четко сказать, что в полной мере это предположение не выполняется. Однако нужно признать, что так всегда обстоит дело с применением теоретико-вероятностных, статистических закономерностей на практике.

Предположение 3. Об анализируемом финансовом инструменте (или о близких в некотором смысле к нему понятиях) должна быть накоплена определенная информация. В настоящее время это не так сложно, как можно подумать. В БД, рассеянных по всему миру, накоплены огромные массивы самой разнообразной информации, и толково составленный запрос может принести много нужной информации. (В качестве примера можно привести информацию о курсе доллара и других валют на мировых валютных рынках в данный момент или о поведении курсов этих валют за последние годы.) Этой информации вполне может хватить для статистической обработки с целью получения оценок интересующих нас показателей с нужной точностью.

2. Надежность, рискованность операций и инструментов. Эти термины многозначны. Приведем некоторые их толкования.

Надежность операции как вероятность ее успешного завершения. Если окажется, что операция не может быть проведена или доведена до конца, то встанет вопрос о ее надежности, т.е. шансах на ее осуществление. Если данная операция относится к типовым, к повторяющимся, хотя бы в своих существенных чертах, то тогда можно точно поставить вопрос: какова надежность операции, т.е. вероятность ее осуществления? Например, какова вероятность заключения сделки? Опять-таки можно различать надежность *историческую* и *прогнозную*. Первая считается по информации об уже осуществленных операциях, т.е. подсчитывается доля успешно осуществленных, доведенных до конца операций по отношению ко всем, которые были начаты, но, возможно, не закончены. Прогнозная надежность оценивается исходя из исторической информации или мнения экспертов с учетом, если это возможно, изменившихся условий.

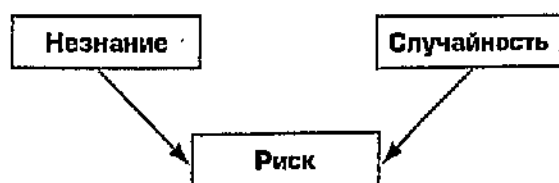
Пример 1. Риэлторская фирма по продаже и покупке дачных участков, коттеджей и т.п. работает на рынке уже 10 лет. В ней ведется учет сделок на всех этапах, начиная с обращения клиента и заканчивая окончательным оформлением сделки. Сделки типизированы. Этапы заключения сделки четко описаны, и агент после окончания каждого этапа обязан обратиться к БД и проанализировать сходные сделки, попытавшись уберечь себя от ошибок, из-за которых его сделка может быть не доведенной до конца. При таком анализе он может узнать из БД много полезной информации: каков процент сделок, «разваливающихся» после данного этапа, и по какой причине сделки «развалились» и т.д.

Заметим, что сходные проблемы имеют агентства по страхованию, бюро по обмену жилья и многие другие.

Надежность операции как предсказуемость. Такое понимание надежности, несомненно, отражает некоторый аспект ее интуитивного неформального понимания. Детерминированные процессы, несомненно, надежны в любом понимании, это и есть, собственно, крайняя высшая степень надежности. С другой стороны, любой случайный процесс несет в себе элементы ненадежности. Однако, если некоторые интересные нам характеристики случайного процесса, например доход, могут быть предсказаны совершенно точно, то нас это вполне может устроить — мы, например, можем планировать совершенно четко некоторые дальнейшие действия и случайность процесса можем игнорировать. Такого рода соображения широко применяются, скажем в страховании, где действует закон больших чисел, и хотя судьбу конкретной автомашины невозможно предугадать, но сколько их будет всего разбито, можно предсказать с точностью до долей процента, и такая точность предсказания позволяет совершенно четко планировать деятельность страховых компаний.

Рискованность операций и инструментов. Как правило, финансовые операции рискованны, т.е. точный доход от них

невозможно предсказать заранее. Заметим далее, что риск возникает только тогда, когда не ясна полностью ситуация, в которой принимается решение, или неизвестно, как будут развиваться события в будущем. Рассмотрим, например, чисто спекулятивную операцию банка по двойной конверсии рублевой суммы в доллары в надежде, что в будущем курс доллар-рубль поднимется и обратная конверсия долларов в рубли принесет некоторую прибыль. Здесь не ясны по крайней мере две составляющие: поведение курса доллар-рубль и темп инфляции, обесценивания рубля (впрочем, обе эти составляющие с точки зрения данной валютной операции можно свести, конечно, к одной первой). Развитие ситуации с интересующей нас точки зрения зависит от нашего *незнания* действий Центробанка, но также и от *случайности* — совершенно случайных, непредгнозируемых, непредсказуемых факторов мирового масштаба, влияющих на положение доллара как мировой валюты. Это справедливо и в самом общем смысле: риск есть производное от этих двух факторов (на рисунке это изображено графически).



На преодоление незнания тратятся большие средства, задействованы большие силы. Скажем, в банковской сфере работники валютных отделов уже не представляют себе нормальной работы без многочисленных информационных систем, доставляющих им ежемоментно большое количество информации о «сейчас» и «будущем» — т.е. прогнозной информации. Преодоление незнания делает поведение участников экономики более прогнозируемым, их действия становятся объективно обусловленными, лишаются личностных мотивов, которые чаще всего возникают в неясных ситуациях. Преодоление незнания делает рынок, экономику более стабильными, а это сейчас ценится очень высоко почти везде в мире.

Итак, современная тенденция состоит в уменьшении незнания, для чего ЛПР обзаводятся всевозможными информационными системами и системами обработки и принятия решений. Так что риск, возникающий от незнания, все время уменьшается и во многих случаях сегодня мы уже можем его игнорировать.

Но остается еще случайность. Ведь для финансовых операций результат почти всегда случаен (достаточно сказать, что реальный размер дохода, например, зависит от инфляции, а последнюю нельзя

предугадать полностью в силу многих случайных факторов, на нее влияющих). Поэтому возникает много весьма важных вопросов такого сорта: 1) Каков средний ожидаемый доход? 2) Какова вероятность получения дохода не менее заданного? 3) Какой риск несет данная операция? 4) Какую операцию из нескольких выбрать, если у них разные доходы и риски? 5) Что надо предпринять, чтобы получить такой-то доход с вероятностью не меньше заданной?

Подобные вопросы, несомненно, находятся в центре внимания при проведении финансовых операций. Теоретически, зная распределение случайного дохода Q , ответить на указанные выше вопросы, по крайней мере на некоторые, несложно.

Пример 2. Пусть распределение случайного дохода Q имеет вид:

-10	10	20	30	40
0,1	0,3	0,1	0,4	0,1

Тогда ответы на поставленные вопросы таковы: 1) надо вычислить математическое ожидание, оно равно 20; 2) построим функцию распределения F и тогда вероятность получения дохода не менее заданного равна $P(Q \geq b) = 1 - F(b)$; для конкретных же чисел эту вероятность нетрудно подсчитать непосредственно, например, $P(Q \geq 10) = 0,9$; 3) ответ на этот вопрос зависит от нашего понимания риска в данной ситуации, здесь вполне естественно понимать риск как среднее квадратическое; вычисления дают такой результат: $\sigma_Q \approx 14$; 4) с подобными вопросами мы имели дело в п. 3 раздела 16.2; 5) для ответа на подобный вопрос нужно более подробное описание ситуации (здесь может помочь байесовский подход к принятию решений — см. п. 4 раздела 16.2).

3. Статистические характеристики ценных бумаг. На финансовом рынке обращается множество ценных бумаг. Ценная бумага удостоверяет возможность получения некоторого дохода Q_0 . В общем случае владелец получит некоторый случайный доход Q . Из характеристик ценных бумаг наиболее значимы две: *эффективность* (или средняя ожидаемая эффективность) E и *рискованность* r .

Эффективность есть некоторый обобщенный показатель дохода, прибыли или доходности. Окрашен индивидуальной оценкой ЛПР. Применяется, когда нет нужды уточнять его конкретность. Обычно эффективность считается с.п., обозначается через E , среднее ожидаемое значение есть математическое ожидание $M[E] = m_E$.

При исследовании финансового рынка дисперсию обычно называют вариацией V , и рискованность r обычно отождествляется с мерой рассеянности значений эффективности вокруг некоторого среднего ее значения. Часто рискованность отождествляется со средним квадратическим отклонением. Таким образом, $V = D[E] = M[(E - m_E)^2]$, $r = \sqrt{V} = \sqrt{M[(E - m_E)^2]}$.

Если имеется выборка $w = (e_1, \dots, e_n)$ значений эффективности ценной бумаги, то $E = (\sum_{i=1}^n e_i)/n$ — есть состоятельная и несмещенная

оценка средней ожидаемой эффективности. Величины $\tilde{V} = (\sum_{i=1}^n (e_i - E)^2)/(n-1)$ и $\tilde{r} = \sqrt{\tilde{V}} = \sqrt{(\sum_{i=1}^n (e_i - E)^2)/(n-1)}$ — состоятельные

и несмещенные оценки дисперсии и рискованности. Для вычислений можно также использовать приемы начальной статистической обработки информации (см. п. 3 раздела 16.4).

Когда утверждается, что эффективность — это с.п., то ее распределение почти никогда не бывает известно. На практике мы лишь имеем ряд ее значений (иногда весьма длинный), по которому можем вычислить оценки нужных параметров ее распределения. С этими оценками и приходится иметь дело.

Пример 3. Имеем ряд значений эффективности (0, 5, 6, 7, 4, 8, 3, 4, 6, 1, 2, 5, 6, 9, 6, 7, 3, 5, 7, 6). Найти среднее значение и оценку рискованности.

Решение. Используем нужные формулы и получаем: $\tilde{E} = (0 + 5 + \dots + 7 + 6)/20 = 5$, $\tilde{V} = ((-5)^2 + 0 + 1 + 2^2 + \dots)/19 = 102/19$, $\tilde{r} = \sqrt{\tilde{V}} \approx 2,4$.

Стоит, пожалуй, еще раз (см. раздел 16.2) отметить единственное фундаментальное правило, связывающее эффективность и рискованность операций и инструментов финансового рынка.

Правило. Между эффективностью и рискованностью существует прямая регрессионная зависимость — более эффективные (более доходные) операции, как правило, и более рискованные.

ЗАДАЧИ

1. Рассмотрите следующие высказывания и определите, что в них — незнание или случайность:

а) вы не имеете данных о динамике курса доллар-рубли за прошлый год;

б) вы не имеете данных о состоянии активов вашего банка;

в) оцените выгодность ваших фьючерсных контрактов (это зависит от погоды в предстоящие три месяца);

г) вы решаете вопрос о выдаче кредита клиенту, о котором нет детальных сведений, но понятна его принадлежность к определенной социальной группе;

д) при страховании автомобиля определите, какие факторы машины и владельца имеют важность и к чему они относятся: к незнанию или к случайности;

е) выдан кредит под залог жилого дома кредитора; назовите возможные последствия, чем они обусловлены;

ж) стаж работы кассира, связь стажа с незнанием и случайными ошибками.

19.2. ПОРТФЕЛЬ ЦЕННЫХ БУМАГ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. Сущность портфельного подхода. На финансовом рынке обращается, как правило, множество ценных бумаг: государственные ценные бумаги, акции частных фирм, векселя и т.п. Уже указывалось, что эффективность и рискованность ценных бумаг различны. Государственные ценные бумаги относятся к наиболее надежным, но и они рискованны, ибо государственная политика может меняться довольно резко. Если у участника рынка есть свободные деньги, то неразумно держать их в «чулке» — их надо отнести в банк и получать проценты или купить на них ценные бумаги и получать дополнительный доход. Но в какой банк отнести? Какие ценные бумаги купить? Малорисковые ценные бумаги, как правило, и мало доходны, высокодоходные, как правило, более рискованные. Решение этого вопроса во многом определяется отношением участника рынка к риску. Однако экономическая наука может дать некоторые рекомендации для решения этого вопроса. (Остаточная часть этого раздела и следующий раздел 19.3 основаны на материале из [8].)

Рассмотрим *общую задачу распределения капитала*, который участник рынка хочет потратить на покупку ценных бумаг, по различным видам ценных бумаг.

Пусть x_i — доля капитала, потраченная на закупку ценных бумаг i -го вида. Пусть E_i — случайная эффективность (можно считать, доход за некоторый период времени) ценных бумаг i -го вида, стоящих одну денежную единицу. Пусть m_i , σ_i — ожидаемая эффективность и СКО этой эффективности, т.е. m_i — математическое ожидание эффективности и $\sigma_i = \sqrt{V_{ii}}$, где V_{ii} — вариация, или дисперсия этой эффективности. Через V_{ij} будем обозначать *ковариацию* ценных бумаг i -го и j -го видов (или корреляционный момент K_{ij}). *Рискованность* ценной бумаги i -го вида будем отождествлять со средним квадратическим отклонением $\sigma_i = \sqrt{V_{ii}}$.

Набор ценных бумаг, находящихся у участника рынка, называется его *портфелем*. *Эффективность портфеля* (в простейшем случае это доход, приносимый ценными бумагами портфеля за какой-нибудь промежуток времени), вообще говоря, есть случайная величина.

на, обозначим ее через E_p , тогда ожидаемое значение этой эффективности $m_p = M[E_p] = \sum_i x_i m_i$. Дисперсия портфеля есть $D[E_p] = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$.

Так как $\sigma_i = \sqrt{V_{ii}}$ есть мера рискованности i -й ценной бумаги, то величина $\sigma_p = \sqrt{D[E_p]}$ может быть названа *риском портфеля*. Обычно $D[E_p]$ обозначается через V_p . Итак, мы выразили эффективность и риск портфеля через эффективности составляющих его ценных бумаг и их ковариации.

2. Влияние корреляции разных ценных бумаг. Предположим сначала, что ценные бумаги различных видов ведут себя независимо, более точно — они некоррелированы, т.е. $V_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Тогда

$$V_p = \sum_i x_i V_{ii} \text{ и } \sigma_p = \sqrt{\sum_i x_i V_{ii}}.$$

Предположим далее, что деньги вложены равными долями, т.е. $x_i = 1/n$ для всех $i = 1, \dots, n$, тогда $m_p = (\sum_i m_i)/n$ — средняя ожидаемая

эффективность портфеля, и риск портфеля равен $\sigma_p = \sqrt{V_p} = \sqrt{\sum_i V_{ii}/n}$.

Пусть $\bar{\sigma} = \max \sigma_i$, тогда $\sigma_p \leq \bar{\sigma}/\sqrt{n}$. Отсюда следует такой вывод.

Вывод. При некоррелированных ценных бумагах, при росте числа их видов n в портфеле, риск портфеля ограничен и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Этот вывод называется *эффектом диверсификации* (разнообразия) портфеля и представляет собой главное практическое правило работы с ценными бумагами на финансовом рынке. Это правило воплощено также в народной мудрости — «не клади все яйца в одну корзину».

Пример 1. Предположим, инвестор имеет возможность составить портфель из четырех видов некоррелированных ценных бумаг, эффективности и риски которых даны в таблице.

i	1	2	3	4
E_i	3	5	8	10
σ_i	2	4	6	8

Рассмотрим несколько вариантов составления портфеля из этих бумаг равными долями:

а) портфель образован только из бумаг 1-го и 2-го

видов; тогда $m_p = (3 + 5)/2 = 4$; $\sigma_p = \sqrt{2^2 + 4^2}/2 \approx 2,23$;

б) портфель образован только из бумаг 1-го, 2-го и 3-го видов; тогда

$m_p = (3 + 5 + 8)/3 \approx 5,3$; $\sigma_p = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2}/3 \approx 2,5$;

в) портфель образован из бумаг всех четырех типов; тогда $m_p = (3 + 5 + 8 + 10)/4 = 6,5$; $\sigma_p = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2}/4 \approx 2,73$.

Видно, что при составлении портфеля из все большего числа ценных бумаг риск растет весьма незначительно, а эффективность растет быстро.

Рассмотрим теперь, как отражается корреляция между видами ценных бумаг на характеристиках портфеля. Корреляция не влияет на эффективность портфеля, ибо $m_p = \sum_i x_i m_i$, но она сказывается на

его вариации, дисперсии или риске, ибо $V_p = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$. Введем в рассмотрение величины $k_{ij} = V_{ij}/(\sigma_i \sigma_j)$ — в курсе теории вероятностей они назывались *коэффициентами корреляции*. Тогда $V_p = \sum_{i,j} (\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) k_{ij}$.

Для того чтобы понять влияние корреляции, рассмотрим два крайних случая.

Сначала — случай *полной прямой корреляции*, когда все $k_{ij} = 1$ — это значит, что при изменении i -го фактора j -й также изменяется, причем прямо пропорционально. Тогда $V_{ij} = \sum_i (\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) = \sum_i (\sigma_i x_i)^2$.

Если при этом вложить деньги равными долями, т.е. $x_i = 1/n$, то $V_p = (\sum_i \sigma_i^2)/n^2$ и риск портфеля $\sigma_p = (\sum_i \sigma_i)/n$. Если $\underline{\sigma} \leq \sigma_i \leq \bar{\sigma}$, то и $\underline{\sigma} \leq \sigma_p \leq \bar{\sigma}$.

Следовательно, при полной прямой корреляции диверсификация портфеля не дает никакого эффекта — риск портфеля равен среднему арифметическому рисков составляющих его ценных бумаг и к нулю не стремится при росте числа видов ценных бумаг.

Положительная корреляция между эффективностями двух ценных бумаг имеет место, когда курс обеих определяется одним и тем же внешним фактором, причем изменение этого фактора действует на обе бумаги в одну и ту же сторону. Например, пусть изменение курсовой цены акций электроэнергетической и транспортной компаний пропорционально изменению цен на нефть. Цена на нефть меняется произвольно, непрогнозируемо, но при этом курсы обеих акций всегда меняются в одну и ту же сторону. Диверсификация портфеля путем покупки акций и того и другого вида бесполезна — риск портфеля окажется примерно таким же, как и СКО цены на нефть.

Теперь рассмотрим ситуацию *полной обратной корреляции*, т.е. когда $k_{ij} = -1$, если $i \neq j$. Для понимания сути дела достаточно рассмотреть портфель, состоящий всего из двух видов ценных бумаг — $n = 2$. Тогда $V_p = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1 x_1 \sigma_2 x_2 = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2$ и, если $x_2 = x_1 \sigma_1 / \sigma_2$, то $V_p = 0$. Отсюда можно сделать довольно интересный вывод.

Вывод. При полной обратной корреляции возможно такое распределение вложений между различными видами ценных бумаг, что риск полностью отсутствует.

Полная обратная корреляция — довольно редкое явление, и обычно она очевидна.

3. Оптимальный портфель. Каждый владелец портфеля ценных бумаг сталкивается с дилеммой: хочется иметь эффективность побольше, а риск поменьше. Однако поскольку «нельзя поймать двух зайцев сразу», необходимо сделать определенный выбор между эффективностью и риском; этот выбор в конечном счете определяется отношением ЛПР к эффективности и риску.

Перейдем к математической формализации задачи формирования оптимального портфеля. Эта формализация была предложена Н. Markovitz в 1951 г., за что позднее он получил Нобелевскую премию.

Пусть x_i — доля капитала, вложенного в ценные бумаги i -го вида. Тогда получаем следующую задачу.

Задача. Найти x_i , минимизирующие вариацию эффективности портфеля $V_p = \sum_{i,j} x_i x_j V_{ij}$, при условии, что обеспечивается заданное значение ожидаемой эффективности портфеля m_p , т.е. $\sum_i x_i m_i = m_p$. Поскольку x_i — доли, то в сумме они должны составлять единицу: $\sum_i x_i = 1$.

Решение (оптимальное) этой задачи обозначим x^* . Если $x_i^* > 0$, то это означает рекомендацию вложить долю x_i^* наличного капитала в ценные бумаги i -го вида. Если же $x_i^* < 0$, то содержательно это означает провести операцию «short sale» (будет объяснено чуть далее). Если такие операции невозможны, значит, необходимо ввести ограничения $x_i \geq 0$.

Разберем два случая — в зависимости от количества видов ценных бумаг.

1) Посмотрим, как все это выглядит для случая двух видов ценных бумаг. Вышенаписанная задача получается такой:

$$x_1^2 V_{11} + 2x_1 x_2 V_{12} + x_2^2 V_{22} \rightarrow \min,$$

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 = m_p,$$

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Пусть для определенности $m_1 > m_2$. Последние два уравнения определяют x_1, x_2 : $x_1^* = (m_p - m_2)/(m_1 - m_2)$, $x_2^* = (m_1 - m_p)/(m_1 - m_2)$.

Видим, что если требуемая эффективность портфеля лежит между эффективностями видов ценных бумаг, то обе доли x_1^* , x_2^* положительны. Если же $m_p > m_1$, то $x_2^* < 0$. Значит, в этом случае необходимо провести операцию «short sale» (или просто взять нужную денежную сумму в долг). Что это за операция?

Инвестор, формирующий портфель, обязуется через какое-то время поставить ценные бумаги 2-го вида (вместе с доходом, какой они бы принесли их владельцу за это время). За это сейчас он получает их денежный эквивалент. На эти деньги он покупает ценные бумаги 1-го вида и получает по ним доход. Так как ценные бумаги 1-го вида более эффективны, то инвестор оказывается в выигрыше! Таким образом, он фактически делает деньги из ничего! Конечно, такие операции возможны лишь в силу очень хорошего знания финансового рынка (при наличии хороших связей, конфиденциальной информации и т.п.).

2) Для случая трех видов ценных бумаг дело усложняется. Поэтому ограничимся выводами общего характера.

а) С увеличением требуемой эффективности вклады в каждый вид ценных бумаг меняются линейно, если возможна операция «short sale», и кусочно-линейно, если невозможны такие операции. Растут вклады более эффективных, но и более рискованных ценных бумаг, уменьшаются вклады в менее эффективные и менее рискованные.

б) Мера риска оптимального портфеля возрастает с ростом требуемой эффективности. При возможности использования капитала, взятого в долг, можно сформировать портфель с любой требуемой эффективностью, но при этом и риск будет неограниченно возрастать. Если же взятие в долг невозможно, то предельная эффективность портфеля совпадает с самой большой эффективностью из всех ценных бумаг (и в этом случае именно в эти ценные бумаги вкладывается весь капитал).

4. Оптимальный портфель при наличии безрисковых бумаг. Через несколько лет после этого исследования Марковица другой крупнейший американский экономист Д. Тобин (*Tobin D.* — также впоследствии лауреат Нобелевской премии) заметил, что если на рынке есть безрисковые бумаги (к таким можно с некоторой натяжкой отнести государственные ценные бумаги), то решение задачи об оптимальном портфеле сильно упрощается и приобретает замечательное новое качество.

Пусть m_0 — эффективность безрисковых бумаг, а x_0 — доля капитала, в них вложенного. Пусть m_p — средняя ожидаемая эффективность и V_p , σ_p — вариация (дисперсия), СКО эффективности рискованной части портфеля, в рискованную часть портфеля вложено $(1 - x_0)$ часть всего капитала. Тогда ожидаемая эффективность всего портфе-

для $m_p = x_0 m_0 + (1 - x_0) m_p$, вариация портфеля равна $V_p = (1 - x_0)^2 V_r$ и риск портфеля $\sigma_p = (1 - x_0) \sigma_r$ (считается, что безрисковые бумаги не коррелированы с остальными). Исключая x_0 , получим: $m_p = m_0 + \sigma_p(m_r - m_0)/\sigma_r$, т.е. ожидаемая эффективность портфеля линейно зависит от его риска.

Рассмотрим задачу об оптимальном портфеле в этом случае. Рисковые виды ценных бумаг будем нумеровать числами от 1 до n .

$$\sum_{i,j=1}^n x_i x_j V_{ij} \rightarrow \min,$$

$$x_0 m_0 + \sum_{i=1}^n x_i m_i = m_p, \quad (1)$$

$$x_0 + \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Изложим теперь окончательное решение этой задачи, полученное Д. Тобином. Пусть V — матрица ковариаций рискованных видов ценных бумаг, $X = (x_i)$, $M = (m_i)$ — векторы-столбцы долей x капитала, вкладываемых в i -й вид рискованных ценных бумаг, и ожидаемых эффективностей этого вида, $i = 1, \dots, n$. Пусть также I — n -мерный вектор-столбец, компоненты которого есть единица. Тогда оптимальное значение долей x_i^* есть

$$X^* = \frac{m_p - m_0}{(M - m_0 I)^T \cdot V^{-1} (M - m_0 I)} V^{-1} (M - m_0 I). \quad (2)$$

Здесь V^{-1} — матрица, обратная к V . В числителе дроби стоит число, в знаменателе, если выполнить все действия (верхний индекс T означает транспонирование вектора-столбца), тоже получится число, причем константа, определяемая рынком и не зависящая от инвестора, $V^{-1} (M - m_0 I)$ — вектор-столбец размерности n . Видно, что этот вектор не зависит от эффективности портфеля m_p . Таким образом, вектор долей рискованных видов ценных бумаг, пропорциональный этому вектору, также не зависит от m_p . Следовательно, структура рискованной части портфеля не зависит от m_p . Однако сумма компонент вектора X^* зависит от m_p , именно компоненты вектора X^* пропорционально увеличиваются с ростом m_p , поэтому доля x_0 безрисковых вложений будет при этом сокращаться.

Пример 2. Сформировать оптимальный портфель заданной эффективности из трех видов ценных бумаг: безрисковых эффективности 2 и некоррелированных рискованных ожидаемой эффективности 4 и 10 и рисками $\sigma_1 = 2$ и $\sigma_2 = 4$ соответственно. Как устроена рискованная часть оптимального

портфеля? При какой ожидаемой эффективности портфеля возникает необходимость в операции «short sale» и с какими ценными бумагами?

Решение. Итак, $m_0 = 2$, $M = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$. Зададимся эффективностью портфеля m_p . Теперь, чтобы воспользоваться формулой (2), надо найти обратную матрицу к матрице V (см. п. 5, раздел 1.3). Это просто: $V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{pmatrix}$. Вычислим знаменатель:

$$V^{-1}(M - m_0 I) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

$$(M - m_0 I)^T V^{-1}(M - m_0 I) = (2, 8) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 5.$$

Итак, вектор долей рискованных бумаг есть $X^* = ((m_p - 2)/5) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Таким образом, рискованные доли должны быть одинаковы и каждая из них равна $(m_p - 2)/10$. Следовательно, $x_0 = 1 - (m_p - 2)/5$. Понятно, что необходимость в операции «short sale» возникнет, если $x_0 < 0$, т.е. когда $m_p > 7$.

ЗАДАЧИ

1. Сформировать оптимальный портфель заданной эффективности из двух видов ценных бумаг: безрисковых эффективности 2 и рискованных ожидаемой эффективности 10 и риском 5. Найти зависимость ожидаемой эффективности портфеля от его риска.

Решение. Задача формирования оптимального портфеля в данной ситуации (см. формулу (1)):

$$\sigma_p = 5x_1 \rightarrow \min,$$

$$2x_0 + 10x_1 = m_p,$$

$$x_0 + x_1 = 1.$$

Отсюда $x_0 = (10 - m_p)/8$, $x_1 = (m_p - 2)/8$. Следовательно, $m_p = 2 + 8x_1 = 2 + 8\sigma_p/5$.

2. Решить задачу формирования оптимального портфеля при наличии безрисковых бумаг и некоррелированных остальных в общем виде.

Решение. Используем формулу (2). Матрица V ковариаций рискованных видов ценных бумаг является в данном случае диагональной, обратная к ней также диагональная:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & & 0 \\ & 1/\sigma_2^2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Произведя необходимые вычисления, получаем вектор долей рискованных бумаг:

$$X^* = \frac{m_p - m_0}{\sum_{i=1}^n (m_i - m_0)^2 / \sigma_i^2} \cdot \begin{pmatrix} (m_1 - m_0) / \sigma_1^2 \\ \vdots \\ (m_n - m_0) / \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

19.3. МЕТОД ВЕДУЩИХ ФАКТОРОВ ФИНАНСОВОГО РЫНКА

1. Влияние ведущего фактора на составляющие финансового рынка. Цель анализа финансового рынка — разработка рекомендаций для инвесторов: в какие ценные бумаги вкладывать капитал и в каком количестве. Выше было рассмотрено решение задачи формирования оптимального портфеля ценных бумаг, однако оно носило формальный характер, поскольку опиралось на предположение о том, что эффективности вложений являются случайными величинами с заданными вероятностными характеристиками. Фактически требуется знание вектора математических ожиданий и матрицы ковариации эффективностей. Откуда взять эти величины? Как их найти, учитывая имеющуюся информацию?

В развитых странах регулярно публикуются сведения о биржевом курсе ценных бумаг, прежде всего акций ведущих компаний. Таким образом, можно проанализировать последовательности, отражающие историю курсов и выплачиваемых дивидендов за достаточно длительный период. Пусть значения эффективности E образуют ряд чисел $(e_1, \dots, e_n)$. Можем применить методы математической статистики и найти среднее $\bar{E} = \sum_i e_i / n$ и несмещенную оценку диспер-

сии или вариации $\tilde{V} = \sum_i (e_i - \bar{E})^2 / (n - 1)$, а затем использовать их в

качестве приближенных значений математического ожидания и дисперсии или вариации. Примерно так же можно поступить с ковариациями.

Реальные цифры таковы. Число ведущих компаний, акции которых котируются на биржах США и составляют основную (по общей стоимости) часть рынка, обычно оценивается в $n = 500$ (такое

число учитывается в наиболее популярном издании «*Standard and Poor's index*»). Длительность ежеквартальных временных рядов, имеющих смысл для статистической обработки, $T = 100$ кварталов (экономические условия и даже список ведущих компаний за период более 25 лет слишком сильно изменяются, чтобы столь устаревшие данные считать представляющими ту же генеральную совокупность). Таким образом, имеется $nT = 5000$ чисел, а оценить нужно $n = 500$ средних и $n(n-1)/2 > 100\,000$ ковариаций, т.е. оценить нужно намного больше величин, чем имеем данных, в силу чего точность оценок не может быть хорошей. Поэтому прямой статистический подход для получения оценок средних и вариаций непригоден. Выход был найден через анализ зависимостей курсов и других характеристик ценных бумаг от ведущих факторов финансового рынка. Что же такое *ведущий фактор*?

Как уже подчеркивалось, в экономической жизни все взаимосвязано, но есть факторы, которые влияют сразу практически на все показатели. Например, уровень цен на ближневосточную нефть влияет на котировку акций почти всех компаний США, поскольку эта нефть покрывает более половины энергетических потребностей США. Если цена на нефть поднимется, станет дороже бензин для автомобилей, уменьшится спрос на бензин, на автомобили, на металл для их изготовления, повысятся цены на сельскохозяйственные продукты, поскольку затраты на топливо — основной компонент их себестоимости.

Рассмотрим один из таких ведущих факторов, не определяя пока его природу. Обозначим его F и будем считать, что эффективности всех вложений зависят от него. Простейшая форма зависимости — линейная, так что примем гипотезу, что эффективность данной фиксированной ценной бумаги E линейно зависит от ведущего фактора: $E = a + bF$. Как найти константы a, b ? Эта задача уже была рассмотрена в п. 3 раздела 18.3. В теоретическом плане зависимость E от F выглядит так: $b = V_{FE}/V_{EE}$, $a = m_E - bm_F$. На практике же приходится использовать соответствующие оценки и тогда получим:

$$b = \hat{V}_{FE}/\hat{V}_{EE}, \quad a = \bar{E} - b\bar{F},$$

где $\hat{V}_{FE} = \overline{EF} - \bar{E}\bar{F}$ и $\hat{V}_{EE} = \overline{E^2} - \bar{E}^2$ (см. п. 3, раздел 18.3).

Если гипотеза о влиянии ведущего фактора на данную ценную бумагу верна, то все отклонения от прямой $E = a + bF$ вверх и вниз являются действительно случайными и если в будущем возникнет новая ситуация, новая пара значений E, F , то соответствующая точка расположится где-то в окрестности указанной прямой.

Если ведущий фактор F выбран удачно, то его влиянием определяются почти все случайные колебания эффективности E , а оста-

точные колебания e_i оказываются сравнительно небольшими и некоррелированными и друг с другом, и с эффективностями E_j . Будем обозначать через v вариации и ковариации величин e . Итак, окончательно получаем: $E_i = a_i + b_i F + e_i$ и $v_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Если для каждой ценной бумаги аналогичная зависимость ее эффективности E_i от ведущего фактора F найдена, то можно легко найти и все нужные величины для формирования оптимального портфеля. Действительно, $m_i = a_i + b_i m_F$, $V_{ii} = b_i^2 V_{FF} + v_{ii}$, $V_{ij} = b_i b_j V_{FF}$.

2. Эффективность рынка как ведущий фактор. В роли ведущего фактора F наиболее удобно брать *эффективность самого финансового рынка*. Это — взвешенная (с учетом капитала) сумма эффективностей всех ценных бумаг, обращающихся на рынке. Итак, эффективности всех ценных бумаг зависят от F : $E_i = a_i + b_i F + e_i$. Обычно вместо буквы b_i используют букву β_i и этот коэффициент так и называют «бета ценных бумаг вида i относительно рынка», или короче «*бета i -го вклада*». Эти величины определяют влияние рынка на судьбу данных ценных бумаг: если $\beta_i > 0$, то эффективность бумаг i -го вида колеблется в такт с рынком, а если $\beta_i < 0$, то поведение бумаги прямо противоположно колебаниям эффективности рынка в целом.

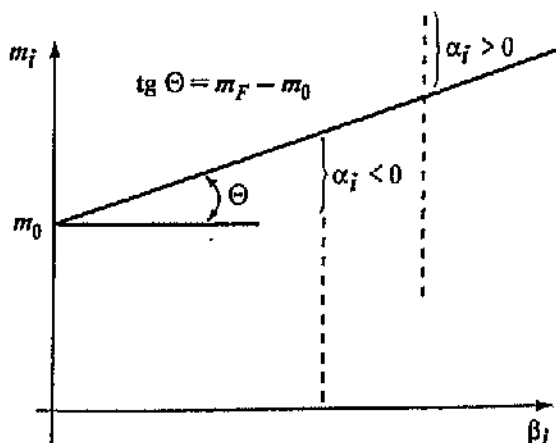
Отметим теперь, что вариация эффективности V_{ii} каждой ценной бумаги равна $\beta_i^2 V_{FF} + v_{ii}$, т.е. состоит из двух слагаемых: «собственной» вариации v_{ii} , не зависящей от рынка, и «рыночной» части вариации $\beta_i^2 V_{FF}$, определяемой случайным поведением рынка в целом. Их отношение $\beta_i^2 V_{FF} / v_{ii}$ обозначается R^2 и называется *R-squared*. Это отношение характеризует долю риска данных ценных бумаг, вносимую рынком. Те бумаги, для которых *R-squared* велико, в каком-то смысле предпочтительнее, так как их поведение более предсказуемо.

Удобно отсчитывать эффективность ценных бумаг от эффективности безрискового вклада m_0 . Итак, $m_i - m_0 = \beta_i (m_F - m_0) + \alpha_i$, где $\alpha_i = a_i + \beta_i m_0 - m_0$. Превышение средней эффективности ценной бумаги над безрисковой эффективностью m_0 называется *премией за риск*. Таким образом, премия за риск линейно зависит от премии за риск, складывающейся для рынка в целом.

3. Оптимальный портфель на идеальном конкурентном рынке. Под таким финансовым рынком понимают рынок, все участники которого располагают одинаковой информацией и принимают на ее основе наилучшие, оптимальные решения. В частности, каждый участник рынка стремится сформировать оптимальный портфель своих ценных бумаг. Но согласно теории Тобина, структура рискованной части оптимального портфеля одна и та же и не зависит от склонности инвестора к риску. Поэтому все захотят сформировать портфель, еди-

наковый по своей рисковей части. Однако структура продаваемых ценных бумаг может не быть таковой. Тогда пойдут обычные перераспределительные процессы: ценные бумаги, спрос на которые больше их предложения, начнут повышаться в цене, а спрос на которые меньше — понижаться. В конце концов установится равновесие, при котором оптимальный портфель в своей рисковей части будет такой же, как и весь рынок в рисковей части. Следовательно, и для рынка в целом будет справедливо соотношение: $m_i = m_0 + \beta_i (m_F - m_0)$, где m_F — средняя эффективность всего рынка в целом. Итак, премия за риск, связанный с данной ценной бумагой, пропорциональна премии за риск рынка в целом и коэффициентом пропорциональности является «бета» данной ценной бумаги.

Это соотношение принято называть *основным уравнением равновесного рынка*. Его удобно использовать и в графическом виде (см. рисунок).



На рисунке по горизонтальной оси отложены величины «бета», а по вертикальной — средние ожидаемые эффективности ценных бумаг. Прямая линия именуется *линией рынка ценных бумаг (Security Market Line, SML)*. В теории точка (эффективность, бета) любой ценной бумаги должна лежать на этой прямой. В реальности же уравнение для ценной бумаги включает еще одно слагаемое α_i . Если $\alpha_i > 0$, то считается, что рынок недооценивает ценные бумаги этого вида, а если $\alpha_i < 0$, то переоценивает, т.е. точки, лежащие выше линии рынка, соответствуют недооцененным бумагам, а ниже — переоцененным. Поэтому одна из практических рекомендаций финансового анализа — инвестор должен включить в портфель прежде всего недооцененные рынком бумаги, т.е. с $\alpha_i > 0$.

Пример 1. В таблице указаны курс акций E и эффективность рынка F на протяжении ряда кварталов. Найти зависимость курса акций от

эффективности рынка, а также характеристики акций: «собственную» вариацию ν и α , β , R^2 (эффективность безрисковых вложений принять равной 4).

E :	15	13	14	15	16	17	16	15	14	15
F :	10	9	9	10	10	11	12	10	9	10

Решение. Находим оценки для математического ожидания, дисперсии E ,

и т.д. оценки и получим: $\bar{E} = 15$, $\bar{F} = 10$, $\hat{V}_{EE} = \sum_{i=1}^{10} (e_i - 15)^2 / 10 = 12/10$, $\hat{V}_{FF} =$

$= \sum_{i=1}^{10} (f_i - 10)^2 / 10 = 8/10$, $\hat{K}_{EF} = \sum_{i=1}^{10} (e_i - 15)(f_i - 10) / 10 = 8/10$. Значит, $b =$

$= \hat{K}_{EF} / \hat{V}_{FF} = (8/10) / (8/10) = 1$, $a = \bar{E} - b\bar{F} = 15 - 10 \cdot 1 = 5$. Таким образом, уравнение приближенной линейной зависимости E от F есть: $E = 5 + F$ (см. п. 3, раздел 18.3). Следовательно, с.в. остаточных колебаний e есть $E - (5 + F)$. Проще всего найти вариацию этого остатка, составив ряд значений e :

0	-1	0	0	1	1	-1	0	0	0

Среднее, естественно, равно нулю, и потому $\hat{V}_{ee} = 4/10$. Далее, $\beta = b = 1$, $\alpha = a - m_0 + \beta m_0 = 5 - 4 + 4 = 5$, $R^2 =$

$= \beta^2 \hat{V}_{FF} / \hat{V}_{ee} = (8/10) / (4/10) = 2$. Поскольку $\alpha > 0$, то эта ценная бумага недооценена рынком. (Напоминаем, что $\hat{V}_{FF}$, $\hat{V}_{ee}$ обозначают выборочные анало-

ги вариаций с.в. F , e , в частности $\hat{V}_{FF} = s_F^2 = \sum_{i=1}^{10} (f_i - 10)^2 / 10 = 8/10$.)

Итак, оптимальный портфель на идеальном конкурентном рынке имеет ту же структуру рисковых бумаг, что и весь рынок. Таким образом, при формировании портфеля надо довериться рынку и сформировать рисковую часть портфеля аналогично рынку. Если, скажем, в общей стоимости всех рисковых бумаг на рынке акции компании *IBM* составляют 1,5%, то и инвестор должен вложить 1,5% своего капитала, предназначенного для рисковых ценных бумаг, в акции *IBM*.

Но как разделить капитал на рисковую и безрисковую части, теория не может подсказать, это разделение зависит от склонности инвестора к риску. Желая увеличить эффективность своего портфеля, инвестор должен будет уменьшать долю безрисковых бумаг и увеличивать доли рисковых бумаг, сохраняя оптимальные пропорции между ними.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1 (к темам 1—3)

Внимание! Вычисления вести либо в обыкновенных дробях, либо с точностью до 1-го знака после запятой.

1. ТЕКСТ ЗАДАНИЯ И ДАННЫЕ ДЛЯ ОДНОГО ВАРИАНТА

Задание I. В пространстве трех товаров рассмотрите бюджетное множество при векторе цен P и доходе Q . Опишите его и его границу с помощью обычных и векторных неравенств и равенств, изобразите бюджетное множество и его границу графически. В ответе дайте число — объем бюджетного множества.

Данные: $P = (2, 5, 6)$, $Q = 30$.

Задание II. Рассмотрите задачу оптимального планирования с матрицей норм расхода A , векторами удельных прибылей C и запасов ресурсов B .

Данные: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = (2, 2)$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

1. Решите эту задачу графическим методом, найдите оптимальный план, максимальную прибыль, остатки ресурсов. Какие ресурсы являются «узкими местами» производства?

2. Составьте двойственную задачу и решите ее, используя 2-ю теорему двойственности и зная ответ к исходной задаче из п. 1.

3. Найдите следующие произведения лекторов и матриц (пишите в произведениях экономического смысла!) (символ ^{T} обозначает операцию транспонирования): CA , AB , CB , BC , AC^T , $B^T A$, $B^T C^T$, $C^T B^T$.

Задание III. Даны зависимости спроса D и предложения S от цены p . Найдите равновесную цену, выручку при равновесной цене. Найдите цену, при которой выручка максимальна, и саму эту максимальную выручку.

Данные: $D = 400 - 5p$, $S = 100 + 5p$.

Задание IV (Модель Леонтьева). Даны вектор C непроизводственного потребления и матрица A межотраслевого баланса. Найдите вектор валового выпуска, обеспечивающий данный вектор потребления.

$$\text{Данные: } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Задание V (Модель Неймана). Даны матрицы A , B технологических процессов, вектор цен P и вектор S начальных запасов. Найдите интенсивности z_1, z_2 технологических процессов, максимизирующие стоимость выпуска продукции за один производственный цикл, и эту самую максимальную стоимость.

$$\text{Данные: } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}, P = (1, 5), S = \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание I. Вектор цен $P = (p_1, p_2, p_3)$, набор товаров $X = (x_1, x_2, x_3)$. Бюджетное множество B — это множество всех наборов товаров X , которые потребитель может купить на данное количество денег Q при данных ценах P (при этом не обязательно тратить все деньги). Бюджетное множество можно описать так (набор товаров — это вектор-столбец, но по типографским соображениям записываем его в виде вектора-строки):

а) обычными неравенствами

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 \leq Q,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0;$$

б) векторными неравенствами

$$P \cdot X \leq Q,$$

$$X \geq 0.$$

Граница бюджетного множества — это его часть, это множество наборов товаров, которые стоят в точности Q . Граница бюджетного множества описывается так:

а) обычными равенствами

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = Q,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0;$$

б) векторными равенствами

$$P \cdot X = Q,$$

$$X \geq 0.$$

Для случая трех товаров бюджетное множество представляет собой трехгранную пирамиду, одна вершина которой есть начало координат, а три другие — точки $Q/p_1, Q/p_2, Q/p_3$ на осях OX_1, OX_2, OX_3 . Граница же бюджетного множества — это основание этой пирамиды, если ее вершину считать началом координат. Объем бюджетного множества равен $(1/3)(Q/p_1)(1/2)(Q/p_2)(Q/p_3)$. При наших данных объем равен $V = 75$.

Задание II. 1. Решение этой задачи графическим методом см. в п. 3, раздел 3.1.

2. Двойственную задачу составляем по правилам из п. 2, раздел 3.2:

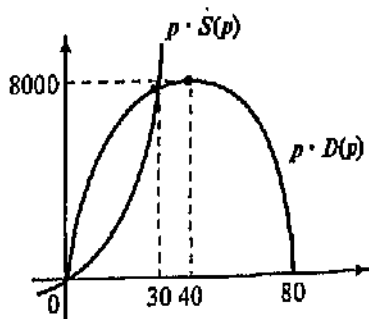
$$\begin{aligned} S(x_1, x_2) &= 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, & N(y_1, y_2) &= 6y_1 + 6y_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 6, \quad y_1 \geq 0 & 3y_1 + y_2 &\geq 2, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6, \quad y_2 \geq 0 & y_1 + 2y_2 &\geq 2, \\ x_1, x_2 &\geq 0, & y_1, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение двойственной задачи с использованием 2-й теоремы двойственности и ответа к исходной задаче см. в п. 3, раздел 3.2. Приведем только ответы: $y_1 = 2/5$, $y_2 = 4/5$, $N_{\min} = 36/5$.

3. Приведем только ответы:

$$\begin{aligned} CA &= (8, 6), AB = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix}, CB = (24), BC = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}, B^T A = (24, 18), \\ B^T C^T &= (24), AC^T = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, C^T B^T = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Задание III. Точка равновесия характеризуется равенством спроса и предложения: $D(p) = S(p)$, т.е. $400 - 5p = 100 + 5p \rightarrow p = 30$. Выручка при равновесной цене равна $R(50) = D(30) \times 30 = 7500$. Выручка же при цене p равна $R(p) = \min \{p \cdot D(p), p \cdot S(p)\}$. На рисунке показан график выручки в зависимости от p . Видно, что максимум достигается при $p = 40$ и равен 8000.



Задания IV, V. Решения этих задач см. в п. 1, раздел 3.3 (модель Леонтьева) и в п. 3, раздел 3.3 (модель Неймана), а также в задачах 1 и 2 в п. 3, раздел 3.3.

3. СЕМЬ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

№ вар.	Данные для задания				
	I	II	III	IV	V
1	$P = (7, 3, 2)$ $Q = 42$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $C = (4, 1)$ $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$	$D = 100 - 10p$ $S = 100 + 10p$	$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ $P = (1, 1)$ $S = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$
2	$P = (1, 3, 4)$ $Q = 24$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $C = (5, 1)$ $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$	$D = 800 - 10p$ $S = 200 + 10p$	$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ $P = (1, 5)$ $S = \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$
3	$P = (5, 2, 4)$ $Q = 60$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $C = (1, 6)$ $B = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}$	$D = 900 - 20p$ $S = 100 + 10p$	$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$ $P = (1, 2)$ $S = \begin{pmatrix} 22 \\ 18 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$
4	$P = (2, 3, 4)$ $Q = 60$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $C = (5, 1)$ $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$	$D = 400 - 20p$ $S = 70 + 10p$	$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $P = (2, 6)$ $S = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
5	$P = (5, 8, 4)$ $Q = 120$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = (5, 1)$ $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$	$D = 600 - 8p$ $S = 120 + 8p$	$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $P = (2, 3)$ $S = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

№ вар.	Данные для задания				
	I	II	III	IV	V
6	$P = (4, 9, 6)$ $Q = 36$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $C = (3, 1)$ $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix}$	$D = 400 - 5p$ $S = 100 + 5p$	$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $P = (2, 3)$ $S = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$
7	$P = (3, 8, 5)$ $Q = 120$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $C = (3, 1)$ $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$	$D = 500 - 5p$ $S = 50 + 5p$	$C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/3 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ $P = (1, 1)$ $S = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$

Приложение 2

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2 (к темам 4—6)

Внимание! Вычисления вести либо в обыкновенных дробях, либо с точностью до 1-го знака после запятой.

1. ТЕКСТ ЗАДАНИЯ И ДАННЫЕ ДЛЯ ОДНОГО ВАРИАНТА

Задание I. Функция задана несколькими точками своего графика, а между соседними точками график у нее — отрезок, соединяющий эти точки.

Содержание задания:

- 1) начертите график этой функции;
- 2) опишите эту функцию, задав ее формулами на интервалах между соседними точками;
- 3) найдите область определения и множество значений функции;
- 4) является ли эта функция возрастающей, монотонной, ограниченной, четной, периодической, выпуклой?
- 5) найдите производную этой функции и начертите график производной;

б) найдите критические точки, экстремумы, нули, наибольшее и наименьшее значения функции.

Данные: $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(5, -1)$, $(7, 1)$.

Задание II. Дана парабола $y = x^2 - x$. Подберите новую параболу с ветвями вниз справа от данной, чтобы данная парабола в точке с абсциссой $d > 1$ плавно (т.е. без разрыва производной) переходила в новую. Части двух парабол образуют новую функцию. Найдите производную этой новой функции и нарисуйте ее график. Найдите вторую производную этой функции и также нарисуйте ее график.

Данные: $d = 2$.

Задание III. Пусть производственная функция фирмы есть $y = F(x)$ (объем основных фондов x и выпуск продукции y даны в стоимостном выражении). Сейчас объем основных фондов равен b . Найдите среднюю и предельную фондоотдачу, эластичность выпуска по фондам. Решите задачу фирмы и найдите оптимальный размер фирмы, функцию спроса на ресурсы и функцию предложения продукции (в рассматриваемый момент цену продукции считать в два раза больше цены ресурса).

Данные: $F(x) = 50\sqrt{x}$, $b = 64$.

Задание IV. На склад цемент привозят в барже по Q т. Накладные расходы равны K . Издержки хранения оцениваются в h центов с тонны за сутки. Каждые сутки склад отпускает M т цемента. Нарисуйте график изменения во времени величины запаса на складе. Найдите средние за единицу времени накладные расходы, издержки хранения и суммарные издержки. Судя по первым двум издержкам, оптимален ли размер партии поставки? Найдите по формуле Уилсона оптимальный размер партии поставки.

Данные: $Q = 2000$, $K = 3000$, $h = 20$, $M = 100$.

Задание V. Придерживаясь плана исследования функции, постройте графики следующих функций: $y = f(x)$, $z = F(x)$.

Данные: $f(x) = -x^2 + 9x - 8$; $F(x) = 6x/(1 - x^2)$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание I. Обозначим исследуемую функцию $y = f(x)$.

1) график $f(x)$ приведен на рис. 1;

2) уравнение прямой, проходящей через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) , есть $(x - x_0)/(x_1 - x_0) = (y - y_0)/(y_1 - y_0)$ (см. п. 1, раздел 2.1).

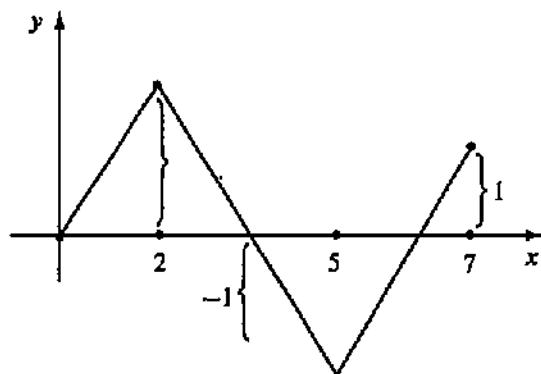


Рис. 1

Поэтому

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ -x + 4 & \text{при } 2 \leq x \leq 5, \\ x - 6 & \text{при } 5 \leq x \leq 7; \end{cases}$$

- 3) $D(f) = [0, 7]$, $R(f) = [-1, 2]$;
- 4) не является возрастающей, монотонной, четной, периодической, выпуклой; является ограниченной;
- 5) производная является кусочно-постоянной, в граничных точках 0, 7 существует односторонняя производная, в точках 2, 5 производной не существует и имеется разрыв 2-го рода — односторонние пределы не совпадают. График производной $f'(x)$ приведен на рис. 2;

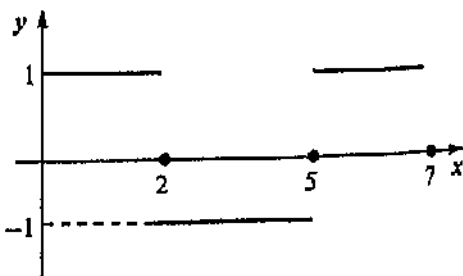


Рис. 2

- 6) критические точки — точки 2, 5; два максимума: один, равный 2 в точке 2, и второй, равный 1, в точке 7; минимум равен -1 в точке 5; три нуля — один в точке 0, другой — в точке 4; третий нуль — в точке 6. Наибольшее значение, равное 2, принимается в точке 2, наименьшее, равное -1, в точке 5.

Задание II. Если $d > 1$, то, очевидно, что можно искать вторую параболу в виде $y = -x^2 + bx + c$. Получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} d^2 - d = -d^2 + bd + c, \\ 2d - 1 = -2d + b. \end{cases}$$

Первое уравнение выражает прохождение обоих графиков через точку с абсциссой d , второе выражает равенство в этой точке производных обеих функций. Решая систему, получим: $b = 4d - 1$, $c = -2d^2$, т.е. при наших данных: $b = 7$, $c = -8$. Итак, из двух парабол получаем функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{при } x \leq 2, \\ -x^2 + 7x - 8 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Производная этой функции:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{при } x \leq 2, \\ -2x + 7 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Производная от нее (2-я производная):

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x < 2, \\ -2 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Их графики приведены на рис. 3, а, б соответственно.

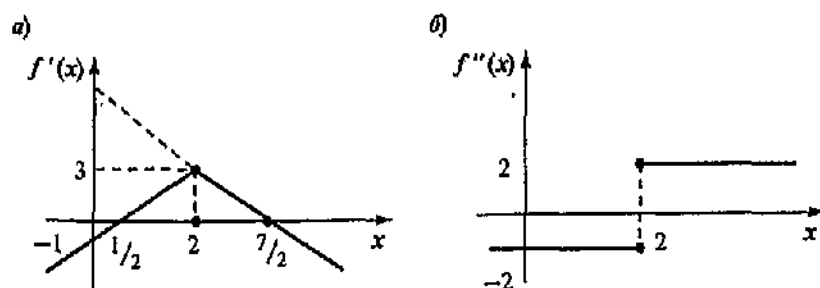


Рис. 3

Задание III. Средняя фондоотдача равна $y(b)/b = 6,25$. Предельная фондоотдача равна $F'(b) = 50/(2\sqrt{b}) = 3,125$. Эластичность выпуска по фондам равна $F'(b)/(y(b)/b) = 3,125/6,25 = 1/2$. Решаем задачу фирмы (см. п. 3, раздел 6.1): $F'(x) = p/v$ или $50/(2\sqrt{x}) = p/v$. Итак, в общем виде функция спроса на ресурс $a^* = 625 v^2/p^2$, при указанном соотношении цен имеем $a^* = 2500$. Наконец, функция предложения

продукции в общем виде $y^* = 50\sqrt{a^*} = 1250$ в/р; для указанного соотношения цен $y^* = 2500$.

Задание IV. Подобная задача достаточно подробно рассмотрена в п. 2, раздел 6.1.

Задание V. Исследуем и построим график только для второй функции — $F(x)$:

- 1) область определения функции: $x \neq \pm 1$;
- 2) функция общего вида;
- 3) две точки разрыва: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, в обеих точках разрывы 2-го рода;
- 4) две вертикальные асимптоты: $x = -1$, $x = 1$, и две горизонтальные — левосторонняя $y = 0$ и правосторонняя $y = 0$;
- 5) одна точка пересечения с осью абсцисс — $x = 0$;
- 6) производная $F'(x) = (6x^2 + 6)/(1 - x^2)^2 > 0$, за исключением точек $x = \pm 1$; значит, есть три промежутка возрастания: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$; экстремумов нет;
- 7) поскольку 1-я производная строго положительна, точек перегиба нет; строим график функции (рис. 4).

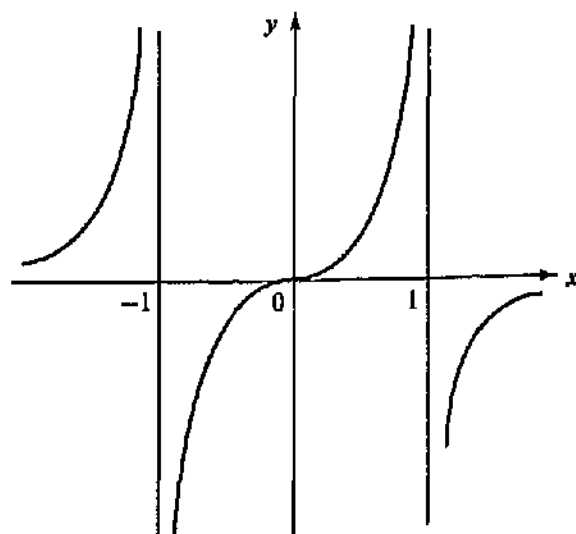


Рис. 4

3. СЕМЬ ВАРИАНТОВ ЗАДАНИЙ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

№ вар.	Данные для задания				
	I	II	III	IV	V
1	(0, 1), (2, -1) (4, 6), (6, 0)	2	$10\sqrt[3]{x}$ 27	$Q = 1000$ $K = 1000$ $h = 10$ $M = 50$	$f(x) = 2x^2 - x$ $F(x) = 2/(x + 1)^2$
2	(0, 0), (1, 2) (3, -1), (5, 1)	3	$50\sqrt{x}$ 100	$Q = 2000$ $K = 2000$ $h = 10$ $M = 50$	$f(x) = x^2 - x + 1$ $F(x) = 4/(x^2 + 1)$
3	(0, -1), (2, 0) (4, 0), (5, 2)	4	$30\sqrt[4]{x}$ 81	$Q = 4000$ $K = 3000$ $h = 20$ $M = 100$	$f(x) = -x^2 + 2x$ $F(x) = x/(x^2 + 1)$
4	(0, -2), (2, 0) (4, 3), (6, 0)	5	$40x^{2/3}$ 8	$Q = 4000$ $K = 2000$ $h = 10$ $M = 40$	$f(x) = 2x^2 - 5$ $F(x) = x^2/(x - 1)$
5	(0, 3), (2, 4) (4, -1), (6, -2)	6	$40x^{3/4}$ 16	$Q = 500$ $K = 500$ $h = 10$ $M = 50$	$f(x) = -x^2 + x + 6$ $F(x) = 4/(x(x - 1))$
6	(1, 4), (2, 4) (4, 6), (6, 0)	7	$64x^{2/5}$ 32	$Q = 500$ $K = 1000$ $h = 20$ $M = 50$	$f(x) = -x^2 + 2x + 4$ $F(x) = 2(x^2 - 1)/x$
7	(0, 2), (1, 4) (3, 0), (5, -1)	8	$96x^{2/3}$ 32	$Q = 1000$ $K = 1200$ $h = 15$ $M = 100$	$f(x) = x^2 - 2x + 4$ $F(x) = 2(1 - x)/x^2$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3 **(к темам 7—9)**

В работе приведены вариант № 1 с указаниями (и для других вариантов) и решениями и еще варианты № 2—5.

Внимание! Вычисления вести либо в обыкновенных дробях, либо с точностью до 1-го знака после запятой.

1. ТЕКСТ ЗАДАНИЯ ВАРИАНТА № 1

Вариант № 1

Задание I. Для функции $z = (x^2y + 1)^2$:

- постройте несколько линий уровня;
- найдите частные производные 1-го и 2-го порядков в общем виде и в точке $(1, 1)$ (убедитесь в равенстве смешанных производных);
- найдите градиент в общем виде и в точке $(2, 3)$;
- найдите дифференциал в общем виде и в точке $(3, 5)$;
- найдите производную в точке $(0, 0)$ по направлению вектора $(1, 4)$;
- пусть $x = 2t$, $y = t^2 - 1$; найдите z_t' в общем виде и при $t = 1$.

Задание II. Для функции полезности $u = \sqrt{x_1 x_2}$:

- постройте несколько кривых безразличия;
- найдите предельные полезности в общем виде и в точке $(1, 1)$; проверьте положительность предельных полезностей и выполнение 1-го закона Госсена (убывание предельных полезностей);
- найдите эластичность полезности по товарам в общем виде и в точке $(2, 3)$;
- найдите точку спроса в общем виде и при доходе 40 и ценах $(4, 1)$.

Задание III. Пусть производственная функция есть функция Кобба—Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на a процентов, надо увеличить фонды на b процентов или численность рабочих на c процентов. В настоящее время один работник за месяц производит продукции на M руб., а всего работников L . Основные фонды

оцениваются в K руб. Напишите производственную функцию и найдите среднюю и предельную производительность труда, среднюю и предельную фондоотдачу, среднюю фондовооруженность, эластичность выпуска по труду и эластичность выпуска по фондам.

Данные: $a = 3$, $b = 6$, $c = 9$, $M = 10^6$, $L = 1000$, $K = 10^{10}$.

Задание IV. Найдите экстремум функции $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ и установите, максимум это или минимум.

Задание V. Для двухкритериальной задачи:

$$x_1 + bx_2 \rightarrow \max;$$

$$ax_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + ax_2 \leq 8;$$

$$8x_1 + bx_2 \leq 24;$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

найдите оптимальное решение по первому критерию, при уровне притязаний по второму в 0,7 от его максимума на допустимом множестве.

Данные: $a = 2$, $b = 3$.

2. УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ № 1

Задание I. Решение: а) см. п. 2 раздела 7.1; линия уровня с функции $f(X)$ — это множество точек $U_c = \{X: f(X) = c\}$. Найдем для функции $z = (x^2y + 1)^2$ линии уровня 0 и 1. Имеем $x^2y + 1 = 0$, т.е. $y = -1/x^2$ (график этой функции см. на рис. 1, а). Линия уровня 1 — это множество $(x^2y + 1)^2 = 1$, т.е. сумма двух множеств: $V(x^2y = 0)$ и $W(x^2y = -2)$. Множество V — это объединение координатных осей OX и OY ; множество W — это график функции $y = -2/x^2$ (рис 1, б);

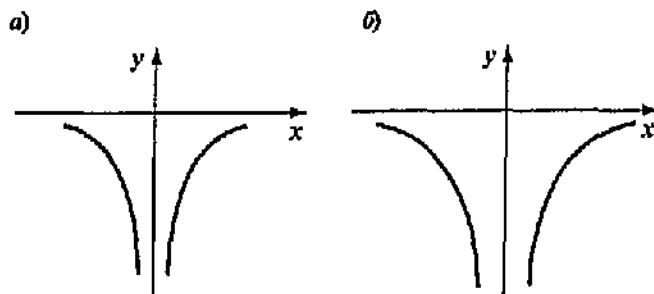


Рис. 1

б) находим частные производные: $z'_x = 2(x^2y + 1)2xy = 4x^3y^2 + 4xy$, $z'_y = 2(x^2y + 1)x^2 = 2x^4y + 2x^2$; в точке $(1, 1)$ они равны 8 и 4 соответ-

ственно; далее находим 2-е частные производные: $z''_{xx} = 12x^2y^2 + 4y$, $z''_{xy} = 8x^3y + 4x$, $z''_{yx} = 8x^3y + 4x$, $z''_{yy} = 2x^4$ (смешанные производные z''_{xy} , z''_{yx} действительно равны); в точке (1, 1) 2-е производные: $z''_{xx} = 16$, $z''_{xy} = 12$, $z''_{yy} = 2$;

в) о градиенте см. п. 3 раздела 8.2; градиент $\nabla z = (\partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$, т.е. $(4xy(x^2y + 1), 2x^2(x^2y + 1))$; в точке (2, 3) он равен $z = (312, 104)$;

г) дифференциал функции $dz = z'_x dx + z'_y dy$; подставляя частные производные, получаем $dz = (4xy(x^2y + 1))dx + (2x^2(x^2y + 1))dy$; в точке (3, 5) он равен $2760dx + 828dy$;

д) о производной по направлению см. п. 3 раздела 8.2; имеем $x = 0 + t$, $y = 0 + 4t$, $z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t$, подставляя вычисленные ранее частные производные z'_x , z'_y и добавляя производные $x'_t = 1$, $y'_t = 4$, получаем $z'_t = (4xy(x^2y + 1)) \cdot 1 + (2x^2(x^2y + 1)) \cdot 4 = 4x(y + 2x)(x^2y + 1)$; в точке (0, 0) производная по указанному направлению равна нулю;

е) о дифференцировании по параметру см. п. 3 раздела 8.1; имеем $z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t$; подставляя вычисленные ранее частные производные z'_x , z'_y и добавляя производные $x'_t = 2$, $y'_t = 2t$, получаем $z'_t = (4xy(x^2y + 1)) \cdot 2 + (2x^2(x^2y + 1)) \cdot 2t$; при $t = 1$ $x(1) = 2$, $y(1) = 0$, подставляя все это, получаем $z = 8$.

Задание II. Решение: подп. «а»—«б» см. пример 3 раздела 8.2;

в) эластичность полезности по первому товару равна $(\partial u/\partial x_1)/(u/x_1) = 1/2$, по второму товару равна также $1/2$, т.е. эластичности постоянны;

г) см. пример 2 раздела 9.1.

Ответ: $x_1^* = Q/(2p_1)$, $x_2^* = Q/(2p_2)$. Для конкретных данных задания получаем: $x_1^* = 40/8 = 5$, $x_2^* = 40/2 = 20$.

Задание III. См. пример 6 раздела 8.1.

Задание IV. Решение. Находим частные производные и приравняем их к нулю: $u'_x = 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$; $u'_y = 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2$. Нашли стационарную точку $(-1, -2)$. Для того чтобы узнать тип экстремума в ней, находим 2-е частные производные: $A = u''_{xx} = 2$, $B = u''_{xy} = 0$, $C = u''_{yy} = 2$. Так как $D = AC - B^2 = 4 > 0$ и $A = 2 > 0$, то точка $(-1, -2)$ есть точка минимума (см. п. 2 раздела 9.1).

Задание V. Решение. Чтобы узнать максимум 2-й целевой функции, решаем задачу линейного программирования:

$$2x_1 + x_2 \rightarrow \max;$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8;$$

$$8x_1 + 3x_2 \leq 24;$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Поскольку она с двумя переменными, решаем ее графически (рис. 2). Допустимое множество есть четырехугольник $OKBC$. Откладывая от начала координат вектор-градиент целевой функции, т.е. вектор $(2, 1)$, и перемещаем линию уровня целевой функции перпендикулярно этому вектору в его направлении. Последняя точка допустимого множества, когда линия уровня еще пересекает допустимое множество, есть точка B . Ее координаты находим, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8; \\ 8x_1 + 3x_2 = 24. \end{cases}$$

Получаем $x_1 = 24/13$, $x_2 = 40/13$.

Подсчитываем максимум 2-й целевой функции: $2 \cdot 24/13 + 40/13 = 88/13$. Вычисляем $7/10$ от этого максимума: $(7/10) \cdot (88/13) = 308/65$.

Теперь рассматриваем новую задачу ЛП:

$$\begin{aligned} & x_1 + 3x_2 \rightarrow \max; \\ & 2x_1 + x_2 \geq 308/65; \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ & 8x_1 + 3x_2 \leq 24; \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Опять решаем ее графически, как только что было описано (см. рис. 2). Максимум 1-й целевой функции исходной двухкритериальной задачи достигается в точке A $(32/65, 244/65)$ и равен $764/65$ (допустимое множество заштриховано).

Это и есть окончательный ответ.

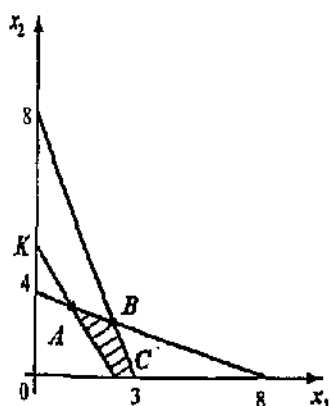


Рис. 2

3. ДАННЫЕ ДЛЯ ВАРИАНТОВ № 2—5

Вариант	Данные для задания				
	I	II	III	IV	V
2	$z = (y - 1)x^2$	$u = x_1^{1/2}x_2^{1/3}$	$a = 1, b = 3, c = 3,$ $K = 10^9, L = 10^3,$ $M = 10^7$	$z = x^2 - (y - 1)^2$	$a = 8$ $b = 2$
3	$z = (y - 1)x^2$	$u = \sqrt[3]{x_1x_2^2}$	$a = 1, b = 2, c = 4,$ $K = 10^8, L = 5^4,$ $M = 10^7$	$z = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2xy$	$a = 2$ $b = 8$
4	$z = (x^2 + 1)(y + 1)$	$u = 2x_1 + 3x$	$a = 2, b = 5, c = 5,$ $K = 10^{10}, L = 2^5,$ $M = 10^6$	$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$	$a = 4$ $b = 0$
5	$z = xy + y^2$	$\min \{2x_1, x_2\}$	$a = 2, b = 5, c = 4,$ $K = 10^{10}, L = 10^4,$ $M = 10^6$	$z = x^3 + y^2 - 3xy$	$a = 2$ $b = 2$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4 (к темам 10—14)

В работе приведены вариант № 1 с указаниями (и для других вариантов) и решениями и еще варианты № 2—5 для самостоятельного решения.

Внимание! Вычисления вести либо в обыкновенных дробях, либо с точностью до первого знака после запятой.

1. ТЕКСТ ЗАДАНИЯ ВАРИАНТА № 1

Вариант № 1

Задание I. А. Вычислите определенные интегралы:

$$\int_1^2 (2x - 3x^2) dx, \int_1^9 2dx/\sqrt{x}, \int_0^{\pi/10} 2 \sin 5x dx, \int_0^{\pi} x \sin x dx, \int_{-1}^1 x dx/\sqrt{5-4x}.$$

Б. Вычислите несобственные интегралы:

$$\int_0^1 \ln x dx, \int_{-\infty}^{\infty} dx/(1+x^2).$$

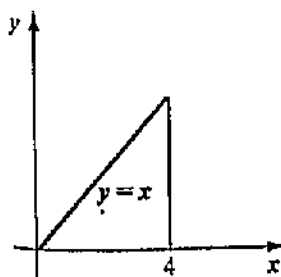


Рис. 1

В. Вычислите кратные интегралы. Найдите объем тела-цилиндра над плоской областью (рис. 1) и уравнением «крыши» $z = 2x + y$. Найдите массу тела-цилиндра из предыдущей задачи с плотностью $f(M) = x + y + 2z$.

Задание II. А. Найдите частное решение уравнения, которое при $x = 0$ принимает значение $y = 1$: $y' = 2x + x^2$, $y' = e^{4x}$, $y' = \sin x \cos x$.

Б. Найдите общее решение уравнения $y' = 3x - y$, $y' - y/x = x^3$.

Задание III. А. Установите сходимость или расходимость рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n/(2n-1), \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\sqrt{n+1}), \sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)/2^n, \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 - 4n + 5).$$

Б. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

2. УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ № 1

Задание I. *Решения.* А. Первые три интеграла вычисляются непосредственно, дадим только ответы: 1) -4 ; 2) 8 ; 3) $2/5$.

Четвертый интеграл вычисляется интегрированием по частям.

$$\text{Имеем: } x = u, \quad \sin x \, dx = dv \quad \text{и потому} \quad \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = (x \cdot -\cos x) \Big|_0^{\pi} - \\ - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx = -\pi \cdot \cos \pi + \int_0^{\pi} \cos x \, dx = \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Для вычисления пятого интеграла используем подстановку $5 - 4x = z^2$, после чего получаем $x = (5 - 4z^2)/4$, $dx = -z \cdot dz/2$ и

$$\text{потому} \quad \int_{-1}^1 x \, dx / \sqrt{5 - 4x} = \int_3^1 (5 - z^2)/4 \cdot (-z \, dz / (2z)) = \int_3^1 (z^2 - 5) dz / 8 = \\ = (z^3/24 - 5z/8) \Big|_3^1 = (1/24 - 5/8) - (27/24 - 15/8) = 1/6.$$

Б. Несобственные интегралы есть пределы, поэтому $\int_0^1 \ln x \, dx =$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \ln x \, dx. \quad \text{Вычислим } \int \ln x \, dx \text{ по частям. Он равен } x(\ln x - 1).$$

$$\text{Значит, } \int_{\varepsilon}^1 \ln x \, dx = x(\ln x - 1) \Big|_{\varepsilon}^1 = -1 - \varepsilon(\ln \varepsilon - 1). \quad \text{Ясно, что при } \varepsilon \rightarrow 0$$

это выражение стремится к -1 . Поэтому исходный несобственный интеграл равен -1 .

Для второго интеграла дадим только ответ: π .

В. См. пример 3 из раздела 11.1.

Ответ: $160/3$.

По поводу вычисления массы тела см. пример 4 из раздела 11.1.
Ответ: $1952/3 \approx 650,6$.

Задание II. Решения. А. Уравнения решаются непосредственным интегрированием с последующим нахождением произвольной постоянной. Приведём только ответы: 1) $y = x^2 + x^3/3 + 1$; 2) $y = e^{4x}/4 + 3/4$; 3) $y = -\cos 2x/4 + 5/4$.

Б. Оба уравнения являются линейными и решаются методом вариации произвольной постоянной. Рассмотрим только решение первого уравнения. Сначала решаем однородное уравнение $y' + y = 0$. Его общее решение $y = ce^{-x}$. Теперь считаем c функцией от x , дифференцируем и подставляем в исходное уравнение. Получаем

$c' = 3xe^x$, откуда $c = \int 3xe^x$. Этот интеграл находим интегрированием по частям, получаем $c = 3(x - 1)e^x$. Окончательно, $y = 3(x - 1) + ce^{-x}$.

Задание III. Решения. А. 1) Поскольку общий член ряда стремится к $1/2$, а не к нулю, то ряд расходится (см. п. «В» из раздела 14.1); 2) см. пример 3 раздела 14.1; 3) сходится, устанавливается сравнением с геометрической убывающей прогрессией со знаменателем $1/2$; 4) сходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/(n^2 - 4n + 5))/(1/n^2) = 1$ (см. теорему 2 из п. 3 раздела 14.1).

Б. Используем замечание после теоремы 5 из раздела 14.1. Для исследуемого ряда $x_n = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$; значит, радиус сходимости исследуемого ряда равен единице.

3. ДАННЫЕ ДЛЯ ВАРИАНТОВ № 2—5

Зада- ние	Вариант			
	2	3	4	5
I, А	$\int_0^1 \sqrt{1+x} \, dx$	$\int_{-2}^{-1} dx/(11+5x)^3$	$\int_2^{-13} dx \sqrt[5]{(3-x)^4}$	$\int_4^9 (y-1)^2 dy$
	$\int_0^2 (x^2-3)dx$	$\int_0^7 (7+\sqrt{x})dx$	$\int_0^4 (x^2+\sqrt{x})dx$	$\int_1^4 (x^{3/2}-2x)dx$
	$\int_0^{\pi} \cos 2x dx$	$\int_0^{\pi/6} \sin 3x dx$	$\int_0^{\pi} \cos (x/2) dx$	$\int_{-\pi}^0 2 \sin^2 x dx$
	$\int_4^9 \sqrt{x} \, dx/(\sqrt{x}-1)$	$\int_0^1 \sqrt{x} \, dx/(1+x)$	$\int_3^8 x \, dx/\sqrt{1+x}$	$\int_0^1 x^2 \, dx/(1+x^2)^3$
	$\int_0^1 x e^{-x} dx$	$\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$	$\int_{\pi/6}^{\pi/2} x \, dx/\sin^2 x$	$\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$
Б	$\int_0^1 3 dx/\sqrt{1-x^2}$	$\int_1^2 2x dx/\sqrt{x-1}$	$\int_{-1}^1 (x+1) dx/x^{2/3}$	$\int_{-1}^1 dx/(x \ln^2 x)$
	$\int_1^{\infty} dx/x^4$	$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} dx/(x^2+2x+2)$	$\int_2^{\infty} \ln x dx/x$

Зада- ние	Вариант			
	2	3	4	5
В	$z = x + 2y$  $2x + y + 2z$	$z = 2x + y$  $x + 2y$	$z = x + 4y$  $2x + 2y + 2z$	$z = 4x + y$  $x + 6z$
П, А	$y' = 4 - x^3$ $y' = 2^x$ $y' = \sin 7x$	$y' = 2 + \sqrt{x}$ $y' = 5^{x-1}$ $y' = \cos 5x$	$y' = \sqrt{x} - x$ $y' = e^{x+3}$ $y' = \sin 2x \cdot \cos 2x$	$y' = 2x^2 + 7$ $y' = 2e^{-x}$ $y' = \sin^2 x$
Б	$y' = (y + 1)/x$ $y^2 + x^2 y' = xyy'$	$y' = 2x + 4y$ $x dy - y dx = y dy$	$y' - y = \sqrt{x}$ $y' = 1/(2x - y^2)$	$y' = e^{2x} - e^x y$ $y' + 2y = x$
III, А	$\sum_{n=1}^{\infty} n/(7n + 1)$ $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2 \sqrt{n})$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n / \sqrt{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} 4/(n^3 + n + 2)$	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2/(3n^2 + 2n)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}/n^3$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n/(4n + 7)$ $\sum_{n=3}^{\infty} (n - 1)/(n^3 - 1)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}/(7 + n^{1/n})$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2n/(n^3 + 3)$ $\sum_{n=1}^{\infty} (7 + 2^n)/(-5)^n$ $\sum_{n=10}^{\infty} (n + 2)/(n^3 + 8)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (n - 3)/(100n)$ $\sum_{n=1}^{\infty} 7 \sin n/n^2$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+3}/(1/2)^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} 7^n/(8^n + 16)$
Б	$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n} + 2)x^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$	$\sum_{n=0}^{\infty} (x/17)^n$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 5 **[к темам 15, 16]**

В работе приведены вариант № 1 с указаниями и решениями и еще подобные варианты № 2—5 для самостоятельного решения.

Внимание! Вычисления вести либо в обыкновенных дробях, либо с точностью до 1-го знака после запятой.

1. ТЕКСТ ЗАДАНИЯ ВАРИАНТА № 1

Вариант № 1

Задание I. Вычислите A_8^2 , A_8^4 , C_8^2 , C_7^3 , P_4 , P_6 .

Задание II. Дано: $P(A \cup B) = 0,6$; $P(A \cap B) = 0,3$; $P_A = 0,6$.
Найти $P(A)$, $P(B)$, $P_{A \cap B}$ и выяснить, зависимы ли события A , B .

Задание III. В цехе работают восемь мужчин и три женщины. По табельным номерам наугад отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных: а) только две женщины; б) есть хотя бы одна женщина.

Задание IV. Груз может быть отправлен заказчику самолетом, поездом или автомобилем. Все эти варианты равновозможны. Вероятность доставки груза к намеченному сроку равна соответственно 0,99; 0,98 и 0,90. Какова вероятность доставки груза к намеченному сроку?

Задание V. Покупатель, зашедший в секцию сувениров, делает покупку с вероятностью $1/4$. Найти вероятность того, что из четырех покупателей: а) сделает покупку хотя бы один; б) сделают покупки ровно два.

Задание VI. Владельцы кредитных карточек ценят их и теряют весьма редко. Пусть вероятность потерять в течение недели кредитную карточку для произвольного владельца равна 0,001. Всего банк выдал карточки 2000 клиентам. Найти вероятность того, что в предстоящую неделю будет потеряна: а) хотя бы одна; б) ровно одна кредитная карточка. Найти наименее вероятное число карточек, теряемых за неделю. А сколько в среднем теряется карточек за месяц?

Задание VII. Для д.с.в. X с рядом распределения

-1	0	1	6
0,1	0,1	0,1	0,7

:
а) найти вероятности $P(X < 3)$, $P(0 < X < 5)$,

$P(X > 0)$, $P(X < 5)$, $P_{X>0}(X = 6)$; б) вычислить математическое ожидание и дисперсию; в) построить график функции распределения.

Задание VIII. На 200-км газопроводе между компрессорными станциями A и B происходит утечка газа. Утечка равновозможна в любой точке газопровода. Найти вероятность того, что она расположена: а) не далее 20 км от какой-нибудь из компрессорных станций A , B ; б) ближе к A , чем к B .

Задание IX. Рассмотрим несколько различных операций (Q_1 , Q_2 , Q_3) со случайным доходом. Вычислить для всех

Q_1 :	-10	0	10	20
	0,1	0,2	0,5	0,2
Q_2 :	-10	0	10	20
	0,3	0,2	0,1	0,4
Q_3 :	-10	0	10	20
	0,3	0,1	0,2	0,4

операций ожидаемый доход $\bar{Q}$, СКО r . Нанести эти характеристики на единый рисунок, получив графическое изображение операций. С помощью взвешивающей формулы $E(\bar{Q}, r) = \bar{Q} - r$ найти лучшую и худшую операции.

2. УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ № 1

Задание I. См. формулы из п. 4 раздела 15.1 (56, 360, 28, 35, 24, 720).

Задание II. См. задачу 1 из раздела 15.2 (0,4; 0,5; 3/4; зависимы).

Задание III. Применить классическую формулу нахождения вероятностей, см. задачу 3 из раздела 15.1 (28/55; 161/165).

Задание IV. Применить формулу полной вероятности (или формулу Байеса), см. пример 1 из раздела 15.3 (0,956).

Задание V. Применить формулу Бернулли, см. пример 3 из раздела 15.3 (175/256, 27/128).

Задание VI. Применить метод приближения биномиального закона пуассоновским (или какой-нибудь канонический дискретный закон распределения), см. пример 8 из раздела 16.1 (6/7, 2/7, 2, 8).

Задание VII. См. п. 3 раздела 16.1 (0,3; 0,1; 0,8; 0,3; 7/8; $M[X] = 4,2$; $D[X] = 7,7$). График функции распределения представлен на рис. 1.

Задание VIII. Применить равномерный (или показательный) закон, см. пп. 5, 6 раздела 16.3 (1/5; 1/2).

Задание IX. См. п. 3 раздела 16.2 (для Q_1 — 8; 8,7; для Q_2 — 6; 12,8; для Q_3 — 7; 12,7; лучшая операция — Q_1 , худшая — Q_2).

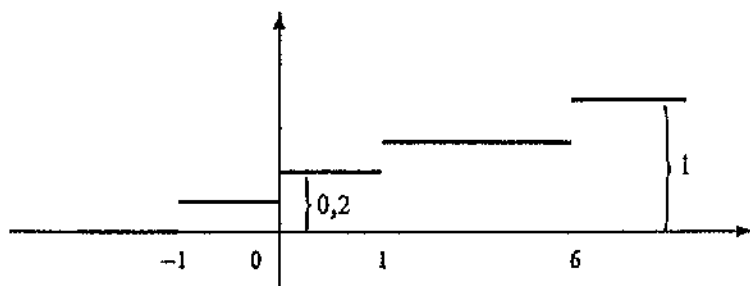


Рис. 1

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ

Вариант № 2

Задание I. Вычислите A_7^3 , A_{10}^2 , C_8^4 , C_9^4 , P_3 , P_7 .

Задание II. Дано: $P(A) = 0,8$; $P(A \cap B) = 0,5$; $P_B A = 0,8$. Найти $P(A)$, $P(A \cup B)$, $P_A B$ и выяснить, зависимы ли события A , B .

Задание III. В урне три белых, три красных и три черных шара. Берем сразу три шара. Найдите вероятность того, что: а) они все одинакового цвета; б) среди них только один шар белый.

Задание IV. Успешно написали контрольную 30% студентов. Вероятность правильно решить задачу на экзамене для студента, успешно написавшего контрольную, равна 0,8, для остальных — 0,4. Студент не решил задачу на экзамене. Какова вероятность того, что он плохо написал контрольную?

Задание V. Вероятность того, что лампа останется исправной после 2000 ч работы равна 0,2. Найдите вероятность того, что из пяти ламп после 2000 ч работы останутся исправными: а) ровно две лампы; б) не менее одной.

Задание VI. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что деталь будет отштампована с браком, равна 0,01. Найдите вероятность того, что среди 200 отштампованных деталей будет: а) ровно одна бракованная; б) хотя бы одна бракованная. Каково наименьшее число бракованных деталей среди этих 200?

Задание VII. Для д.с.в. X с данным рядом распределения: а) найти вероятности

-3	-1	0	1	2	6
0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

$P(X > 0)$, $P(X < 20)$, $P(-1 < X < 10)$, $P(X = 3)$, $P_{X>0}(X = 2)$; б) вычислите математическое ожидание и дисперсию; в) постройте график функции распределения.

Задание VIII. На лесопилке при распиловке хлыстов в качестве отходов получают остатки размером до 1 м и в этих пределах длина остатка равновозможна. Найдите вероятность того, что при распиловке очередного хлыста получится остаток: а) не менее 50 см; б) более 70 см.

Задание IX. Рассмотрим несколько различных операций (Q_1, Q_2, Q_3) со случайным доходом. Вычислите для всех операций ожидаемый доход $\bar{Q}$, СКО r . Нанесите эти характеристики на единый рисунок, получив графическое изображение операций. С помощью взвешивающей формулы $E(\bar{Q}, r) = 2\bar{Q} - r$ найдите лучшую и худшую операции.

Q_1 :	-20	0	20	40
	0,1	0,2	0,5	0,2

Q_2 :	-20	0	20	40
	0,3	0,2	0,1	0,4

Q_3 :	-10	0	10	20
	0,3	0,1	0,2	0,4

Вариант № 3

Задание I. Вычислите $A_{10}^3, A_9^7, C_{10}^3, C_9^7, P_7, P_2$.

Задание II. Дано $P(A \cup B) = 0,6$; $P(A \cap B) = 0,3$; $P_B A = 0,6$. Найдите $P(A)$, $P(B)$, $P_A B$ и выясните, зависимы ли события A, B .

Задание III. На вечеринке за круглым столом рассаживаются случайным образом 11 человек. Найдите вероятность того, что два конкретных человека окажутся сидящими: а) рядом; б) через одного человека.

Задание IV. Характеристика материала, взятого для изготовления продукции, с вероятностями 0,1; 0,2; 0,2; 0,2; 0,3 может находиться в пяти различных интервалах. В зависимости от этой характеристики вероятность получения первосортной продукции равна 0,6; 0,8; 0,8; 0,7; 0,9. Найдите вероятность получения первосортной продукции.

Задание V. Вероятность того, что магнитофон потребует ремонта во время гарантийного срока, равна 0,2. Найдите вероятность того, что из четырех магнитофонов во время гарантийного срока потребуют ремонта: а) только один; б) не менее двух.

Задание VI. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найдите вероятность того,

что в пути будет повреждено: а) хотя бы одно изделие; б) менее двух изделий. Каково наимвероятнейшее число поврежденных изделий?

Задание VII. Для д.с.в. X с данным рядом распределения: а) составьте ряды распределения с.в. $Y = 2X$ и $Z = X^2$; б) вычислите математическое ожидание и дисперсию с.в. Y ; в) постройте график функции распределения с.в. Z .

-4	-1	1	3	4	6
0,1	0,2	0,1	0,1	0,4	0,1

Задание VIII. В дачном поселке иногда отключают электричество на случайное время, распределенное по показательному закону, в среднем на 3 ч. На этот раз электричества уже нет 2 ч. Какова вероятность того, что: а) его дадут в ближайшие полчаса; б) его еще час не дадут.

Задание IX. Рассмотрим несколько различных операций (Q_1, Q_2, Q_3) со случайным доходом. Вычислите для всех операций ожидаемый доход $\bar{Q}$, СКО r . Нанесите эти характеристики на единый рисунок, получив графическое изображение операций. С помощью взвешивающей формулы $E(\bar{Q}, r) = 6\bar{Q} - r$ найдите лучшую и худшую операции.

Q_1 :	-30	0	30	60
	0,1	0,2	0,5	0,2
Q_2 :	-30	0	30	60
	0,3	0,2	0,1	0,4
Q_3 :	-30	0	30	60
	0,3	0,1	0,2	0,4

Вариант № 4

Задание I. Вычислите $A_{12}^2, A_{12}^4, C_7^6, C_6^1, P_3, P_8$.

Задание II. Дано: $P(A \cap B) = 0,4$; $P_A A = 2/3$; $P_A B = 3/4$. Найдите $P(A), P(B), P(A \cup B)$ и выясните, зависимы ли события A, B .

Задание III. Пять машин случайным образом выстраиваются в колонну. Найдите вероятность того, что две конкретные машины окажутся: а) рядом; б) в начале колонны.

Задание IV. В тире имеется пять ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Найдите вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наугад.

Задание V. В семье четыре ребенка. Считая, что вероятность рождения мальчика равна 0,5, найдите вероятность того, что среди этих детей: а) есть хотя бы один мальчик; б) не менее двух мальчиков.

Задание VI. Вероятность того, что абонент позвонит на АТС в течение часа, одинакова для всех абонентов и равна 0,01. АТС обслу-

живает 200 абонентов. Найдите вероятность того, что в течение часа на АТС последует: а) не менее двух звонков; б) хотя бы один звонок. Каково наимвероятнейшее число звонков на АТС в течение часа?

Задание VII. Для д.с.в. X с данным рядом распределения: а) составьте ряды распределения с.в. $Y = X - 1$ и $Z = \max\{X, 0\}$; б) вычислите математическое ожидание и дисперсию с.в. Z ; в) постройте график функции распределения.

-4	-1	1	3	4	6
0,1	0,2	0,1	0,1	0,4	0,1

Задание VIII. Длительность междугородних телефонных разговоров распределена примерно по показательному закону, в среднем разговор продолжается 3 мин. Какова вероятность того, что очередной разговор будет длиннее 3 мин? Какая часть всех разговоров продолжается менее минуты?

Задание IX. Рассмотрим несколько различных операций (Q_1, Q_2, Q_3) со случайным доходом. Вычислите для всех операций ожидаемый доход $\bar{Q}$, СКО r . Нанесите эти характеристики на единый рисунок, получив графическое изображение операций. С помощью взвешивающей формулы $E(\bar{Q}, r) = 4\bar{Q} - r$ найдите лучшую и худшую операции.

Q_1 :	-10	0	10	30
	0,1	0,2	0,5	0,2
Q_2 :	-10	0	10	30
	0,3	0,2	0,1	0,4
Q_3 :	-10	0	10	30
	0,3	0,1	0,2	0,4

Вариант № 5

Задание I. Вычислите $A_8^5, A_9^3, C_7^5, C_{12}^3, P_4, P_6$.

Задание II. Дано: $P(A \cup B) = 0,8$; $P(A \cap B) = 0,4$; $P_B A = 0,6$. Найдите $P(A), P(B), P_A B$ и выясните, зависимы ли события A, B .

Задание III. Среди 20 одинаковых по внешнему виду тетрадей 16 в клетку. Взято 4 тетради. Найдите вероятность того, что из них: а) ровно 2 тетради в клетку; б) хотя бы одна тетрадь в клетку.

Задание IV. В сборочный цех завода поступают детали с трех автоматов. Первый автомат дает 3% брака, второй — 1%, третий — 2%. Определите вероятность попадания на сборку бракованной детали, если в цех поступило от автоматов соответственно 500, 200 и 300 деталей.

Задание V. Из поступивших в магазин телефонов третья часть белого цвета, однако это становится видно только после распаковки. Найдите вероятность того, что из шести нераспакованных телефонов: а) ровно два белых; б) есть хотя бы один белый.

Задание VI. Среди интегральных схем, поступающих в ОТК, 10% бракованных. Автомат, осуществляющий контроль, проверяет схему за схемой, пока не признает очередную стандартной. Составьте ряд распределения с.в. — числа схем, проверенных автоматом вместе с последней, которую он признает стандартной. Каково математическое ожидание этой с.в.?

Задание VII. Для д.с.в. X с данным рядом распределения: а) найдите p_1 и p_2 так, чтобы $M[X] = 0,5$; б) после этого вычислите математическое ожидание и дисперсию с.в. X и постройте график ее функции распределения.

Задание VIII. Кассирша сдает сдачу менее 100 руб. монетами и любое значение в этом промежутке равновозможно (пренебрежем дискретностью размера сдачи и будем предполагать этот размер непрерывным в промежутке $[0, 100]$). Какова вероятность того, что две последовательные сдачи в сумме: а) будут больше 100 руб.; б) будут менее 120 руб.?

Задание IX. Рассмотрите несколько различных операций (Q_1, Q_2, Q_3) со случайным доходом. Вычислите для всех операций ожидаемый доход $\bar{Q}$, СКО r . Нанесите эти характеристики на единый рисунок, получив графическое изображение операций. С помощью взвешивающей формулы $E(\bar{Q}, r) = 5\bar{Q} - r$ найдите лучшую и худшую операции.

Q_1 :	<table><tr><td>-10</td><td>0</td><td>20</td><td>50</td></tr><tr><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,5</td><td>0,2</td></tr></table>	-10	0	20	50	0,1	0,2	0,5	0,2
-10	0	20	50						
0,1	0,2	0,5	0,2						
Q_2 :	<table><tr><td>-10</td><td>0</td><td>20</td><td>50</td></tr><tr><td>0,3</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,4</td></tr></table>	-10	0	20	50	0,3	0,2	0,1	0,4
-10	0	20	50						
0,3	0,2	0,1	0,4						
Q_3 :	<table><tr><td>-10</td><td>0</td><td>20</td><td>50</td></tr><tr><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,4</td></tr></table>	-10	0	20	50	0,3	0,1	0,2	0,4
-10	0	20	50						
0,3	0,1	0,2	0,4						

Приложение 6

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 6 (к разделу 16.4, к темам 17—19)

В работе приведены вариант № 1 с указаниями и решениями и еще подобные варианты № 2—5 для самостоятельного решения.

Внимание! Вычисления вести либо в обыкновенных дробях, либо с точностью до первого знака после запятой.

1. ТЕКСТ ЗАДАНИЯ ВАРИАНТА № 1

Вариант № 1

Задание I. С.в. Y распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным единице, и средним квадратическим отклонением, равным двум. Пусть $X = 3Y$. Найдите вероятности $P(X > 1)$, $P(2 < X < 5)$, $P(X < 2)$, $P(X = 3)$. Напишите функции плотности и распределения для X и постройте их примерные графики. Как выглядит для с.в. X правило «трех сигм»?

Задание II. Вероятность того, что деталь не проверялась в ОТК, равна $p = 0,2$. Найдите вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется от 70 до 100 деталей, не проверенных в ОТК.

Задание III. По результатам наблюдений: 11, 17, 17, 12, 13, 12, 15, 15, 14, 16, 13, 14, 13, 15, 16, 16, 15, 15, 14, 14 — построить дискретный вариационный ряд, многоугольник частостей, график выборочной функции распределения. Подсчитать: а) выборочную среднюю и выборочную дисперсию двумя способами; б) несмещенную оценку дисперсии $\hat{\sigma}^2$. Придумать правдоподобную генеральную совокупность или соответствующую случайную величину.

Задание IV. Система с.в. (X, Y) имеет следующую таблицу рас-

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0,2	0,1	0,1
2	0	0,2	0,4

пределения. Найти: а) законы распределения компонент X , Y и условный закон распределения компоненты X при условии, что $Y = 0$; б) вероятность того, что X примет значение, меньшее чем Y ; в) корреляционный момент K_{XY} и коэффициент корреляции k_{XY} .

Задание V. Инвестор имеет возможность составить портфель из

i	1	2	3
E_i	2	4	6
σ_i	1	3	5

трех видов некоррелированных бумаг, эффективности E_i и риски σ_i , которых даны в таблице.

Рассмотреть все варианты составления портфеля из этих бумаг равными долями. Дать графическое изображение всех этих портфелей точками (по осям координат — эффективность, риск). Есть ли точки, оптимальные по Парето?

Задание VI. Сформировать оптимальный портфель заданной эффективности из трех видов ценных бумаг: безрисковых эффективности, равной четырем, и некоррелированных рискованных ожидаемых эффективностей 8 и 20 с рисками 4 и 10 соответственно. Как устроена рискованная часть оптимального портфеля? При какой ожидаемой

эффективности портфеля возникает необходимость в операции «short sales» и с какими ценными бумагами?

Задание VII. В таблице указаны курс акций E и эффективность рынка F на протяжении ряда кварталов. Найти регрессию курса акций на эффективность рынка, а также оценки характеристик акций: «собственной» вариации γ и α , β , R^2 (эффективность безрисковых вложений равна 6).

E :	25	23	24	25	26	27	26	25	24	25
F :	10	9	9	10	10	11	12	10	9	10

рынка F на протяжении ряда кварталов. Найти регрессию курса акций на эффективность рынка, а также

2. УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ № 1

Задание I. Решение. Применить нормальный закон (см. п. 1, раздел 17.1). Известно, что линейная функция от нормально распределенной с.в. также нормально распределена. Используя свойства математического ожидания и дисперсии, получаем, что X нормально распределена с параметрами: математическое ожидание $a = 3 \cdot 1 = 3$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3 \cdot 2 = 6$. Для вычисления указанных вероятностей применяем формулу: $P(\alpha < X < \beta) = \Phi((\beta - a)/\sigma) - \Phi((\alpha - a)/\sigma)$, т.е. $P(\alpha < X < \beta) = \Phi((\beta - 3)/6) - \Phi((\alpha - 3)/6)$ и получаем:

$$P(1 < X) = P(1 < X < \infty) = 1/2 - \Phi((1 - 3)/6) = 1/2 + \Phi(1/3) \approx 0,63;$$

$$P(2 < X < 5) = \Phi((5 - 3)/6) - \Phi((2 - 3)/6) = \Phi(1/3) + \Phi(1/6) \approx 0,13 + 0,06 = 0,19;$$

$$P(X < 2) = P(-\infty < X < 2) = \Phi((2 - 3)/6) + 1/2 = 1/2 - \Phi(1/6) \approx 0,44.$$

Примерные графики плотности распределения $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ приведены на рис. 1 и 2 соответственно.

$$f(x) = (1/(6\sqrt{2\pi}))e^{-(x-3)^2/72} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x (1/(6\sqrt{2\pi}))e^{-(t-3)^2/72} dt$$

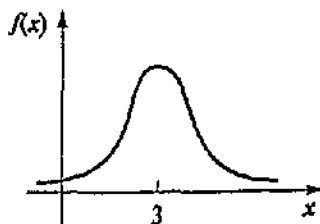


Рис. 1

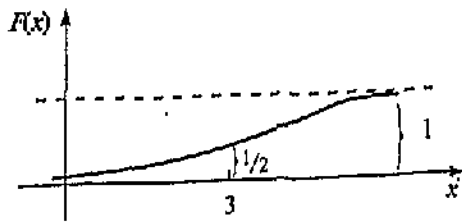


Рис. 2

Правило трех «сигм»:

$$P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) = P(-15 < X < 21) \approx 0,997.$$

Задание II. Воспользуемся интегральной теоремой Муавра—Лапласа (см. п. 3, раздел 17.1): $P(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi((k_2 - np)/\sqrt{npq}) - \Phi((k_1 - np)/\sqrt{npq})$. Здесь $n = 400$, $p = 0,2$, $q = 0,8$. После подстановки имеем: $P(70 < k < 100) \approx \Phi((100 - 80)/8) - \Phi((70 - 80)/8) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) \approx 0,88$.

Задание III. См. примеры 3, 4 из раздела 16.4 (14,3; 2,63; 2,76).

Задание IV. См. примеры 3, 5 из раздела 18.1 ($P(X < Y) = 0,2$; $K_{xy} = 0,44$; $k_{xy} \approx 0,57$).

Задание V. См. пример 1 из раздела 19.2. Всего различных портфелей будет 7 — три портфеля по одной бумаге (их характеристики даны в таблице), три портфеля по две бумаги и один портфель из всех трех бумаг. Приведем ответ только для случая всех трех бумаг: $m_p = 4$, $\sigma_p \approx 1,97$. Для нахождения точек, оптимальных по Парето, — см. п. 4, раздел 16.2.

Задание VI. См. пример 2 из раздела 19.2:

$$(X^* = ((m_p - 4)/89) \left(\frac{1/4}{6/25} \right)).$$

Задание VII. См. пример 1 из раздела 19.3 ($E = 15 + R$, $\hat{v} = 0,4$, $\beta = 1$).

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ

Вариант № 2

Задание I. С.п. Y распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным единице, и средним квадратическим отклонением, равным двум. Пусть $X = 2Y + 3$. Найдите вероятности $P(X > 1)$, $P(2 < X < 5)$, $P(X < 2)$, $P(X = 3)$. Напишите функции плотности и распределения для X и постройте их примерные графики. Как выглядит для с.в. X правило «трех сигм»?

Задание II. В пути повреждается каждое восьмое изделие. Найдите вероятность того, что в партии из 700 изделий поврежденных окажется от 80 до 120.

Задание III. По результатам наблюдений: 21, 27, 27, 22, 23, 22, 25, 25, 24, 26, 23, 24, 23, 25, 26, 26, 25, 25, 24, 24 — постройте дис-

кретный вариационный ряд, многоугольник частостей, график выборочной функции распределения. Подсчитайте: а) выборочную среднюю и выборочную дисперсию двумя способами; б) несмещенную оценку дисперсии $\hat{s}^2$. Придумайте правдоподобную генеральную совокупность или соответствующую случайную величину.

Задание IV. Система с.в. (X, Y) имеет следующую таблицу распределения. Найдите законы распределения компонент X, Y и условный закон распределения компоненты X при условии, что $Y = 0$. Найдите: а) вероятность того, что X примет значение, меньшее чем Y ; б) корреляционное отношение между с.в. X и Y .

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	0,1	0,2
3	0,2	0,2	0,3

Задание V. Инвестор имеет возможность составить портфель из трех видов некоррелированных бумаг, эффективности E_i и риски σ_i , которых даны в таблице.

i	1	2	3
E_i	20	30	40
σ_i	6	8	10

Рассмотрите все варианты составления портфеля из этих бумаг равными долями. Дайте графическое изображение всех этих портфелей точками (по осям координат — эффективность, риск). Есть ли точки, оптимальные по Парето?

Задание VI. Сформируйте оптимальный портфель заданной эффективности из трех видов ценных бумаг: безрисковых эффективности единице, и некоррелированных рискованных ожидаемых эффективностей 3 и 5 с рисками 2 и 4 соответственно. Как устроена рисковая часть оптимального портфеля? При какой ожидаемой эффективности портфеля возникает необходимость в операции «short sale» и с какими ценными бумагами?

Задание VII. В таблице указаны курс акций E и эффективность

E_i	35	33	34	35	36	37	36	35	34	35
F_i	10	9	9	10	10	11	12	10	9	10

рынка F на протяжении ряда кварталов. Найдите регрессию курса акций на эффективность рынка, а также оценки характеристик акций: «собственной» вариации γ и α, β, R^2 (эффективность безрисковых вложений равна 6).

Вариант № 3

Задание I. С.в. Y распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным двум, и средним квадратическим отклонением, равным трем. Пусть $X = 3Y$. Найдите вероятности $P(X > 1)$, $P(2 < X < 5)$, $P(X < 20)$, $P(X = 3)$. Напишите функции плот-

ности и распределения для X и постройте их примерные графики. Как выглядит для СВ X правило «трех сигм»?

Задание II. Фамилия каждого десятого мужчины начинается с буквы M . Найдите вероятность того, что среди 900 солдат полка окажется от 80 до 120 солдат, чьи фамилии начинаются с буквы M .

Задание III. По результатам наблюдений: 31, 37, 37, 32, 33, 32, 35, 35, 34, 36, 33, 34, 33, 35, 36, 36, 35, 35, 34, 34 постройте дискретный вариационный ряд, многоугольник частот, график выборочной функции распределения. Подсчитайте: а) выборочное среднее и выборочную дисперсию двумя способами; б) несмещенную оценку дисперсии $\hat{s}^2$. Придумайте правдоподобную генеральную совокупность или соответствующую случайную величину.

Задание IV. Система с.в. (X, Y) имеет следующую таблицу распределения. Найдите: а) законы распределения компонент X, Y и условный закон распределения компоненты X при условии, что $Y=0$; б) вероятность того, что X примет значение, большее чем Y ; в) корреляционный момент K_{XY} и коэффициент корреляции k_{XY} .

$Y \backslash X$	-2	0	2
0	0,1	0,1	0
3	0,6	0	0,2

Задание V. Инвестор имеет возможность составить портфель из трех видов некоррелированных бумаг, эффективности E_i и риски σ_i , которых даны в таблице.

i	1	2	3
E_i	4	6	18
σ_i	5	8	12

Рассмотрите все варианты составления портфеля из этих бумаг равными долями. Дайте графическое изображение всех этих портфелей точками (по осям координат — эффективность, риск). Есть ли точки, оптимальные по Парето?

Задание VI. Сформируйте оптимальный портфель заданной эффективности из трех видов ценных бумаг: безрисковых эффективности, равной 40, и некоррелированных рискованных ожидаемых эффективностей 80 и 200 с рисками 2 и 6 соответственно. Как устроена рискованная часть оптимального портфеля? При какой ожидаемой эффективности портфеля возникает необходимость в операции «short sale» и с какими ценными бумагами?

Задание VII. В таблице указаны курс акций E и эффективность

E :	25	23	24	25	26	27	26	25	24	25
F :	20	19	19	20	20	21	22	20	19	20

рынка F на протяжении ряда кварталов. Найдите регрессию курса акций на эффективность рынка, а также оценки характеристик акций: «собст-

венной» вариации v и α , β , R^2 (эффективность безрисковых вложений равна 8).

Вариант № 4

Задание I. С.в. Y распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным двум, и средним квадратическим отклонением, равным единице. Пусть $X = 2Y + 5$. Найдите вероятности $P(X > 10)$, $P(2 < X < 5)$, $P(X < 2)$, $P(X = 3)$. Напишите функции плотности и распределения для X и постройте их примерные графики. Как выглядит для с.в. X правило «трех сигм»?

Задание II. Каждый двадцатый кредит не возвращается в срок. В этом году банк планирует выдать около 300 кредитов. Найдите вероятность того, что только не более 10 кредитов не будут возвращены в срок.

Задание III. По результатам наблюдений: 13, 19, 19, 14, 15, 14, 17, 17, 18, 19, 15, 16, 15, 17, 18, 18, 17, 17, 16, 16 — постройте дискретный вариационный ряд, многоугольник частостей, график выборочной функции распределения. Подсчитайте: а) выборочное среднее и выборочную дисперсию двумя способами; б) несмещенную оценку дисперсии $\hat{s}^2$. Придумайте правдоподобную генеральную совокупность или соответствующую случайную величину.

Задание IV. Система с.в. (X, Y) имеет следующую таблицу распределения. Найдите: а) законы распределения компонент X , Y и условный закон распределения компоненты X при условии, что $Y = 0$; б) вероятность того, что $(X < Y)$; в) корреляционное отношение между с.в. X и Y .

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	0,2	0,1	0,1
3	0,1	0,4	0,1

Задание V. Инвестор имеет возможность составить портфель из трех видов некоррелированных бумаг, эффективности E_i и риски σ_i , которых даны в таблице.

i	1	2	3
E_i	2	6	12
σ_i	8	10	12

Рассмотрите все варианты составления портфеля из этих бумаг равными долями. Дайте графическое изображение всех этих портфелей точками (по осям координат — эффективность, риск). Есть ли точки, оптимальные по Парето?

Задание VI. Сформируйте оптимальный портфель заданной эффективности из трех видов ценных бумаг: безрисковых эффективно-сти, равной восьми, и некоррелированных рискованных ожидаемых эф-

эффективностей 16 и 20 с рисками 4 и 16 соответственно. Как устроена рискованная часть оптимального портфеля? При какой ожидаемой эффективности портфеля возникает необходимость в операции «short sale» и с какими ценными бумагами?

Задание VII. В таблице указаны курсы акций E и эффективность рынка F на протяжении ряда кварталов. Найдите регрессию курса акций на эффективность рынка, а также оценки характеристик акций: «собственной» вариации γ и α , β , R^2 (эффективность безрисковых вложений равна 9).

E :	35	33	34	35	36	37	36	35	34	35
F :	20	19	19	20	20	21	22	20	19	20

Вариант № 5

Задание I. С.в. Y распределена по нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю, и средним квадратическим отклонением, равным двум. Пусть $X = 3Y$. Найдите вероятности $P(X > 1)$, $P(2 < X < 8)$, $P(X < 10)$, $P(X = 3)$. Напишите функции плотности и распределения для X и постройте их примерные графики. Как выглядит для с.в. X правило «трех сигм»?

Задание II. Каждый десятый проданный телевизор возвращают обратно в магазин. В прошедший месяц было продано примерно 600 телевизоров. Найдите вероятность того, что возвращено будет не менее 50 телевизоров.

Задание III. По результатам наблюдений: 5, 11, 22, 27, 98, 87, 73, 42, 46, 37, 52, 58, 61, 74, 18, 26, 44, 45, 62, 63, 69, 81, 56, 58, 32, 35, 49, 51, 77, 39 — постройте интервальный вариационный ряд, многоугольник частостей, график выборочной функции распределения. Подсчитайте выборочное среднее двумя способами. По ИВР подсчитайте выборочную дисперсию и несмещенную оценку дисперсии $\hat{s}^2$. Придумайте правдоподобную генеральную совокупность или соответствующую случайную величину.

Задание IV. Система с.в. (X, Y) имеет следующую таблицу распределения. Найдите: а) законы распределения компонент X, Y и условный закон распределения компоненты X при условии, что $Y = 0$; б) вероятность того, что X примет значение, отличающееся от Y не более чем на единицу; в) корреляционный момент K_{XY} и коэффициент корреляции k_{XY} .

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0,1	0,1	0,2
1	0	0,1	0,5

Задание V. Инвестор имеет возможность составить портфель из

i	1	2	3
E_i	3	5	8
σ_i	6	8	12

трех видов некоррелированных бумаг; эффективности E_i и риски σ_i , которых даны в таблице.

Рассмотрите все варианты составления портфеля из этих бумаг равными долями. Дайте графическое изображение всех этих портфелей точками (по осям координат — эффективность, риск). Есть ли точки, оптимальные по Парето?

Задание VI. Сформируйте оптимальный портфель заданной эффективности из трех видов ценных бумаг: безрисковых эффективности, равной двум, и некоррелированных рискованных ожидаемой эффективности 6 и 12 с рисками 2 и 8 соответственно. Как устроена рискованная часть оптимального портфеля? При какой ожидаемой эффективности портфеля возникает необходимость в операции «*short sale*» и с какими ценными бумагами?

Задание VII. В таблице указаны курс акций E и эффективность

E	25	23	24	25	26	27	26	25	24	25
F	30	29	29	30	30	31	32	30	29	30

рынка F на протяжении ряда кварталов. Найдите регрессию курса акций на

эффективность рынка, а также оценки характеристик акций: «собственной» вариации γ и α , β , R^2 (эффективность безрисковых вложений равна 6).

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ

БД	— база данных.
ГКО	— государственные казначейские обязательства (облигации).
ДВР	— дискретный вариационный ряд.
д.с.в.	— дискретная случайная величина.
ДСП	— древесно-стружечная плита.
ИВР	— интервальный вариационный ряд.
ЛПР	— лицо, принимающее решения.
МС	— математическая статистика.
н.с.в.	— непрерывная случайная величина.
с.в.	— случайная величина.
СКО	— среднее квадратическое отклонение.
ТВ	— теория вероятностей.
ЦПТ	— центральная предельная теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ашманов С.А.* Математические модели и методы в экономике. — М., 1980.
2. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1980.
3. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Наука, 1980.
4. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1969.
5. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Наука, 1977.
6. *Киришенок В.Н.* Лекции по высшей математике (рукопись).
7. *Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б.* Математическое программирование. М., 1980.
8. *Первозванский А.Т., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. — М.: ИНФРА-М., 1994.
9. *Фалин Г.И., Фалин А.И.* Введение в актуарную математику. — М.: Изд-во МГУ, 1994.
10. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.

Содержание

Введение	3

ЧАСТЬ 1.

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Тема 1. ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ В ЭКОНОМИКЕ	6
1.1. ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ	6
1. Начальные сведения о векторах	6
2. Действия с векторами	7
3. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов	9
4. Пространство товаров, вектор цен	11
Задачи	11
1.2. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ	12
1. Начальные сведения о матрицах	12
2. Действия с матрицами	13
3. Технологическая матрица и задача оптимального планирования	15
4. Матрицы и линейные преобразования	17
Задачи	18
1.3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)	20
1. Начальные сведения о СЛАУ	20
2. Векторная и матрично-векторная запись СЛАУ	21
3. Определитель матрицы	23
4. Решения СЛАУ с помощью определителей	24
5. Обратная матрица	25
Задачи	26
Тема 2. ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ	28
2.1. ПРЯМЫЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ, ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ	29
1. Прямая линия на плоскости, различные виды уравнений прямой	29
2. Линейные функции спроса и предложения, определения равновесной цены	31
3. Бюджетное множество	31
4. Плоскости и прямые линии в пространствах	33
Задачи	34
2.2. ВАЖНЕЙШИЕ КРИВЫЕ 2-ГО ПОРЯДКА, ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ	35
1. Важнейшие кривые 2-го порядка	36
2. Оптические и геометрические свойства кривых 2-го порядка	38
3. Полярная система координат	39
4. Параметрические уравнения линии	41
Задачи	41
Тема 3. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ	43
3.1. ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ	43
1. Задача оптимального планирования	43

2. Некоторые общие сведения о линейном программировании	44
3. Решение задач ЛП с двумя переменными графическим методом	46
4. Задачи целочисленного ЛП	48
Задачи	48
3.2. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ	50
1. Задача двойственности	50
2. Симметричная пара двойственных задач	51
3. Теоремы двойственности	52
4. Экономическое содержание теории двойственности	54
Задачи	56
3.3. МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА И НЕЙМАНА	58
1. Модель Леонтьева	58
2. Теория трудовой стоимости Маркса в модели Леонтьева	60
3. Модель Неймана	62
Задачи	63
Тема 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ, ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ	64
4.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ	64
1. Элементы теории множеств	64
2. Последовательности	65
3. Предел последовательности и сумма ряда	68
4. Паутинообразная модель рынка	68
5. Прямые и полные затраты в модели Леонтьева	69
Задачи	70
4.2. ФУНКЦИИ	71
1. Общее понятие функции	71
2. Некоторые функциональные зависимости, используемые в экономике	72
3. Элементарные функции	73
4. Свойства функций одного переменного	76
Задачи	75
4.3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИЙ	78
1. Определение предела функции	78
2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	79
3. Основные свойства пределов	80
4. Первый и второй замечательные пределы	81
Задачи	80
4.4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ	82
1. Определения непрерывности функции. Точки разрыва	83
2. Свойства непрерывных функций	84
3. Экономическая интерпретация непрерывности	85
Задачи	86
Тема 5. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ В ЭКОНОМИКЕ	87
5.1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ	87
1. Определение производной функции, ее физический и геометрический смысл	87
2. Применение производной в экономике	89
3. Правила дифференцирования (нахождения производных функций)	90
Задачи	91
5.2. СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ	93
1. Теоремы о дифференцируемых функциях	93
2. Дифференциал функции	94
3. Формула и многочлен Тейлора	96
Задачи	97

Тема 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ	87
6.1. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ И ИХ НАХОЖДЕНИЕ	87
1. Экстремум функции и его нахождение	87
2. Формула Уилсона	88
3. Теория одноресурсной фирмы	89
4. Прибыль фирмы и объем поступления налогов государству при данной налоговой ставке	102
6. Экстремумы выпуклых и вогнутых функций	103
Задачи	103
6.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ	104
1. Возрастание и убывание функций	104
2. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба	104
3. План исследования функции и построения ее графика	105
4. Нахождение нулей функции, приближенное решение уравнений	106
Задачи	107

Часть 2.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ С ЭКОНОМИЧЕСКИМИ ПРИЛОЖЕНИЯМИ

Тема 7. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА	109
7.1. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ	109
1. Определение функции многих переменных	109
2. Способы задания функции многих переменных	110
3. Некоторые многомерные функции, используемые в экономике	112
Задачи	113
7.2. МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА	114
1. Иерархия пространств	114
2. Евклидово пространство	115
3. Топология евклидова пространства	117
4. Свойства функций, заданных в евклидовом пространстве	119
Задачи	121
Тема 8. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ	122
8.1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ	122
1. Частные производные	122
2. Частные производные 2-го и высших порядков	123
3. Экономический смысл частных производных	124
Задачи	125
8.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ	127
1. Дифференцируемость функций нескольких переменных	127
2. Геометрический смысл 1-го дифференциала	128
3. Производная по направлению, градиент функции	129
4. Линеаризация сложных зависимостей	130
5. Дифференциальные свойства функции полезности	131
Задачи	132
Тема 9. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ЭКОНОМИКЕ	133
9.1. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ	133
1. Экстремум функции и его нахождение	133
2. Достаточное условие экстремума	134
3. Условный экстремум, метод множителей Лагранжа	136
4. Задача оптимизации выбора потребителя	136
5. Характеристика точки спроса	139
Задачи	139

9.2. «ЗОЛОТОЕ ПРАВИЛО» ЭКОНОМИКИ	140
1. «Золотое правило» экономики для одноресурсной фирмы.	140
2. «Золотое правило» экономики для многоресурсной фирмы.	143
Задачи	145
9.3. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ЭКОНОМИКЕ ...	146
1. Понятие многокритериальной оптимизационной задачи.	146
2. Оптимальность по Парето	147
3. Модель обмена, цены	148
4. Ящик Эджворта	149
Задачи	151
Тема 10. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ	152
10.1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА	152
1. Дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции	153
2. Геометрическое понимание интеграла	155
3. Таблица основных интегралов	156
4. Простейшие правила интегрирования	157
5. Интегрирование путем замены переменной	157
6. Интегрирование по частям	158
Задачи	158
10.2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА	159
1. Площадь криволинейной трапеции	159
2. Определение определенного интеграла	160
3. Свойства определенного интеграла	161
4. Теорема о среднем значении	163
5. Определенный интеграл с переменным верхним пределом	163
6. Основная формула интегрального исчисления	165
7. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле	167
Задачи	168
10.3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА	169
1. Длина кривой, площадь фигуры и объем тела	169
2. Механические и физические приложения	172
3. Экономические и другие иллюстрации к понятию интеграла	172
Задачи	176
Тема 11. НЕСОБСТВЕННЫЕ И КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	178
11.1. НЕСОБСТВЕННЫЕ И КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	178
1. Определение интегралов с бесконечными пределами	178
2. Несобственные интегралы от неограниченных функций	180
3. Двойные интегралы, определение	180
4. Сведение двойного интеграла к повторному	181
5. Тройные интегралы	182
Задачи	183
Тема 12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	185
12.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	185
1. Определение дифференциального уравнения	185
2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям	186
3. Уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной	188
4. Уравнения с разделяющимися переменными	188
5. Линейные уравнения 1-го порядка, уравнение Бернулли	190
Задачи	191

Тема 13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ 192

13.1. МОДЕЛИ ЭВАНСА И СОЛОУ	192
1. Модель Эванса	192
2. Параметры модели Солоу	194
3. Стационарные траектории в модели Солоу	198
4. «Золотое правило» экономического роста	197
Задачи	198
13.2. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ	198
1. Метод Эйлера приближенного решения дифференциальных уравнений	198
2. Теорема существования и единственности решения	199
3. Понятие об устойчивости решения дифференциального уравнения	200
4. Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков и системах дифференциальных уравнений	201
Задачи	203

Тема 14. ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ 204

14.1. ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ	204
1. Сумма ряда	204
2. Свойства и признаки сходящихся рядов	206
3. Признаки сходимости знакопостоянных рядов	206
4. Знакопеременные ряды	210
5. Степенные ряды	211
Задачи	212

ЧАСТЬ 3.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

Тема 15. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ 215

15.1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ	215
1. Закономерности детерминистические и стохастические	215
2. Частота и вероятность	217
3. Классическая формула подсчета вероятности	218
4. Элементы комбинаторики	220
Задачи	220
15.2. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВЕРОЯТНОСТИ	222
1. Операции над событиями	222
2. Аксиоматический подход к вероятности	223
3. Условная вероятность. Зависимость и независимость событий	225
Задачи	227
15.3. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ	229
1. Формула полной вероятности	229
2. Формула Байеса	229
3. Формула Бернулли	230
4. Кредитный риск и способы его уменьшения	231
Задачи	233

Тема 16. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ 234

16.1. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ	234
1. Дискретные случайные величины	234
2. Математическое ожидание и его свойства	235
3. Дисперсия и ее свойства	237
4. Канонические законы распределения д.с.в.	238
Задачи	241

16.2. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ	242
1. Матрицы последствий и рисков	242
2. Принятие решений в условиях полной неопределенности	243
3. Принятие решений в условиях частичной неопределенности	244
4. Риск как среднее квадратическое отклонение	245
5. Байесовский подход к принятию решений	246
Задачи	247
16.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ	248
1. Определение непрерывной случайной величины	248
2. Свойства функции распределения	249
3. Непрерывные случайные величины и их свойства	250
4. Математическое ожидание и дисперсия н.с.в.	252
5. Равномерное распределение	253
6. Показательное распределение	254
Задачи	255
16.4. НАЧАЛЬНАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ	256
1. Цель начальной статистической обработки информации	256
2. Генеральная совокупность и выборки из нее	257
3. Характеристики выборки	259
Задачи	263
Тема 17. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ	264
17.1. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН, ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ	264
1. Нормальный закон и параметры его задания	264
2. Закон больших чисел	267
3. Центральная предельная теорема и ее следствия	269
Задачи	270
17.2. ПРИМЕНЕНИЯ ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ	271
1. Усреднение влияния независимых факторов	271
2. Понятие о страховании	272
3. Обеспечение репрезентативности выборки	275
Задачи	276
Тема 18. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ	277
18.1. МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	277
1. Многомерные случайные величины	277
2. Корреляция и независимость с.в.	279
3. Функции случайных величин	280
Задачи	282
18.2. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ	283
1. Основные задачи математической статистики	283
2. Точечные оценки параметров генеральной совокупности или с.в.	284
3. Метод максимального правдоподобия	286
4. Интервальные оценки	288
Задачи	287
18.3. ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ	288
1. Типы зависимости между случайными величинами	288
2. Корреляционное отношение	289
3. Линейная однофакторная регрессия	292
Задачи	294

Тема 19. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ФИНАНСОВОГО РЫНКА	294
19.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ФИНАНСОВОГО РЫНКА И ЕГО СОСТАВЛЯЮЩИХ	294
1. Соглашения о финансовом рынке	294
2. Надежность, рискованность операций и инструментов	295
3. Статистические характеристики ценных бумаг	298
Задачи	299
19.2. ПОРТФЕЛЬ ЦЕННЫХ БУМАГ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ	300
1. Сущность портфельного подхода	300
2. Влияние корреляции разных ценных бумаг	301
3. Оптимальный портфель	303
4. Оптимальный портфель при наличии безрисковых бумаг	304
Задачи	306
19.3. МЕТОД ВЕДУЩИХ ФАКТОРОВ ФИНАНСОВОГО РЫНКА	307
1. Влияние ведущего фактора на составляющие финансового рынка	307
2. Эффективность рынка как ведущий фактор	309
3. Оптимальный портфель на идеальном конкурентном рынке	309
Приложения:	
Приложение 1. Контрольная работа № 1 (к темам 1–3)	312
Приложение 2. Контрольная работа № 2 (к темам 4–6)	316
Приложение 3. Контрольная работа № 3 (к темам 7–9)	322
Приложение 4. Контрольная работа № 4 (к темам 10–14)	327
Приложение 5. Контрольная работа № 5 (к темам 15, 16)	332
Приложение 6. Контрольная работа № 6 (к разделу 16.4, к темам 17–19)	338
Перечень сокращений	347
Литература	348

Малыхин Вячеслав Иванович
МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Корректор *Г.М. Короткова*
Компьютерная верстка *В.О. Кожлев*
Оформление серии *Е.А. Дониц*

ЛР № 070824 от 21.01.93 г.

Подписано в печать 15.07.99.
Формат 60 x 88/16. Гарнитура NewtonС. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 21,8. Доп. тираж 3000 экз. Заказ 365
Цена договорная.

Издательский Дом «ИНФРА-М»
127214, Москва, Дмитровское ш., 107.
Тел. 485-70-63, 485-74-00.
E-mail: books@infra-m.ru

Отпечатано в ООО
типографии «ПОЛИМАТ»
127247, Москва, Дмитровское шоссе, 107